

Interactions Fluide Structure

Olivier Boiron

ECM

Novembre 2025



- 1 Introduction
- 2 Formulation du problème général- Analyse dimensionnelle
- 3 Fluide au repos
- 4 Turbulence atmosphérique
- 5 Aéroélasticité
- 6 Transfert de chaleur
- 7 Conduites élastiques - Propagation d'ondes
- 8 Méthodes numériques pour l'IFS

- 1 Introduction
- 2 Formulation du problème général- Analyse dimensionnelle
- 3 Fluide au repos
- 4 Turbulence atmosphérique
- 5 Aéroélasticité
- 6 ~~Stalling~~ ~~Tank sloshing~~
- 7 Conduites élastiques - Propagation d'ondes
- 8 Méthodes numériques pour l'IFS

Introduction

- Les Interactions ou couplages Fluide-Structure (IFS) sont très usuels en ingénierie !!!
- Ils se rencontrent dans des domaines d'application très divers :
 - ▶ le génie civil
 - ▶ l'aérodynamique
 - ▶ l'hydraulique
 - ▶ les machines tournantes / turbomachines
 - ▶ les échangeurs de chaleur
 - ▶ la biomécanique
- Lorsque elles ne sont pas anticipées dans la phase de conception, les manifestations des IFS peuvent :
 - ▶ simplement modifier les performances attendues d'un système
 - ▶ fatiguer mécaniquement prématurement le système
 - ▶ les détériorer complètement

- Il est primordial de correctement anticiper de possible couplages
- Il dispose pour cela d'outils analytiques/expérimentaux/numériques dont l'objet de ce cours est de présenter un bref panorama.

Introduction

Quelques exemples de couplages plus ou moins bien maîtrisés.....

- En génie civil le célèbre pont de Tacoma Narrows Bridge (USA). Le pont était conçu pour résister aux **effets statiques** de vents dont la vitesse était très supérieure à celle de celui qui a causé sa destruction en 1940.

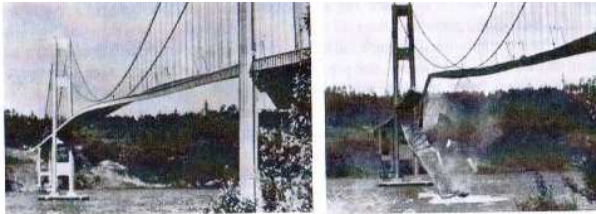


Figure 1 – Le pont de Tacoma Narrows Bridge (1940) : avant vs après....

- C'est ici l'apparition d'un amortissement aérodynamique négatif causé par l'interaction des mouvements de balancement du pont avec l'écoulement (phénomène de galop) et les forces aérodynamiques qu'il engendre qui est à l'origine du problème (vidéo).

Introduction

Tall buildings

- Toujours en génie civil, les tours (ou gratte-ciel) sont soumises à des vents importants et leur élancement les rend sensibles à des sollicitations en flexion/torsion.

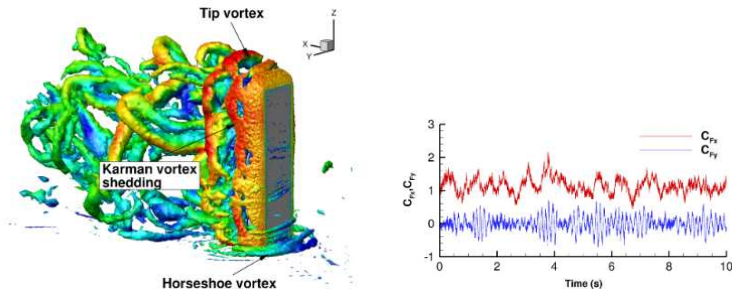


Figure 2 – Structures turbulentes autour d'une tour et évolution temporelle des coefficients aérodynamiques (d'après Y. Zhang *et al*, J. Wind Eng. Ind. Aero., 136(2015) 165-179)

- L'excitation des modes de flexion et/ou de torsion de l'ouvrage peut être l'oeuvre de la turbulence atmosphérique. D'où la nécessité pour ce type de construction, comme pour la plupart des ouvrages de génie civil d'ailleurs, d'avoir une connaissance fine de la météorologie locale.

Introduction

Ballotement dans les réservoirs

- Lorsqu'un réservoir contenant un fluide avec une surface libre est soumis à des accélérations le fluide se met en mouvement et des déformations importantes de la surface libre peuvent survenir.
- Cela peut engendrer des efforts parasites sur les structures du réservoir, la stabilité ou le contrôle d'attitude de l'avion/bateau dans lequel est placé le réservoir.

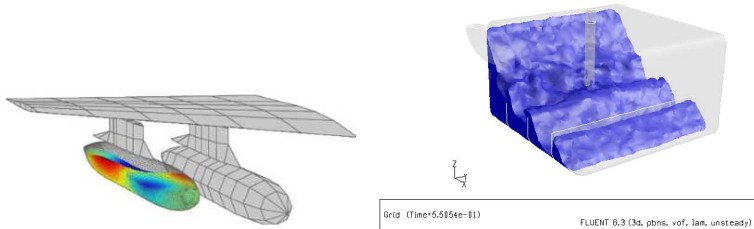


Figure 3 – Ballotement dans le réservoir additionnel d'un chasseur (source ONERA) - Simulation numérique du mouvement de la surface libre dans un réservoir soumis à une accélération horizontale soudaine (fluent)

- Si le ballotement (ou sloshing) induit un couplage avec la structure on parle de phénomènes hydroélastiques.

Introduction

Ballotement dans les réservoirs

- Le mouvement d'oscillation de la surface libre peut être mis à profit pour jouer le rôle d'amortisseur de mouvements de balancements par exemple dans un gratte-ciel ou une éolienne.
- On parle alors de Tuned Liquid Mass Damper ou TLMD.

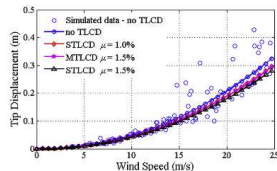
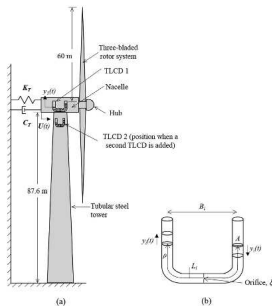


Figure 4 – Amortisseurs de balancement par TLMD (sources : web et A.F. Mensah *et al* Structural Safety 47 (2014) 78-86)

Introduction

Flottement

- Le flottement ou flutter est un phénomène d'aéroélasticité assez courant causé par un couplage entre les forces aérodynamiques et la rigidité et l'inertie d'une structure.
- Il a été très étudié en aéronautique en raison de la flexibilité des ailes d'avions mais il peut également survenir sur des ouvrages de génie civil
- Le flutter classique en aéronautique est un couplage de mode en torsion et en flexion des structures portantes (ailes ou gouvernes) pouvant causer des effets désastreux.
- Le whirl-flutter concerne plus spécifiquement les nacelles des propulseurs.

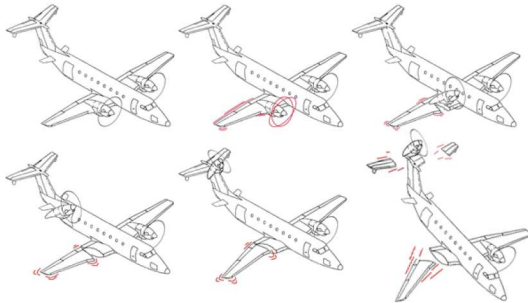


Figure 5 – Exemple de whirl-flutter sur un turbo-propulseur. (source AIAA)

Introduction

Vibrations induites par détachement tourbillonnaire

- Les vibrations induites par les détachements tourbillonnaires (ou Vortex Induced Vibrations - VIV) apparaissent lorsque la fréquence des détachements tourbillonnaires est proche de l'un des modes de vibration de la structure.
- Les détachements tourbillonnaires engendrent une modulation de la charge aérodynamique exercée sur la structure.

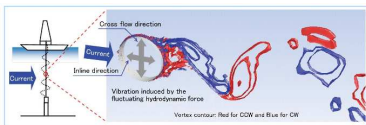


Figure 6 – Exemple de VIV sur un riser et dispositif anti-VIV sur des cheminées.

- En principe la fréquence de détachement tourbillonnaire est proportionnelle à la vitesse incidente. Un mécanisme "d'accrochage fréquentiel" (ou lock-in) peut apparaître lorsque la structure se met à vibrer "bloquant" la fréquence de détachement pour une gamme de vitesse assez large.

Introduction

Couplages type POGO

- Ce sont des vibrations induites dans les structures des lanceurs spatiaux par couplage entre la structure et le système d'alimentation des moteurs fusée (réservoirs, lignes, etc).
- Les vibrations apparaissent sous la forme d'oscillations longitudinales
- L'effet POGO a causé l'échec des trois premiers lancements de la fusée française EMERAUDE.

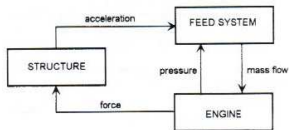


Figure 7 – Oscillations POGO entretenues D. Lourme et al 1977

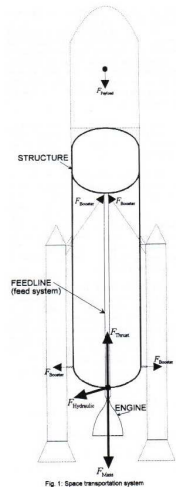


Figure 8 – Effet POGO sur un lanceur d'après T.Tandara et al 1994

Introduction

Les différents types de couplage

Finalement, on distingue 3 grands types de phénomènes conduisant à des couplages Fluide-Structure :

- Les vibrations induites par détachement tourbillonnaire ou **Vortex-Induced Vibrations (VIV)** : ce sont les instationnarités créées par les détachements tourbillonnaires sur le chargement appliqué sur la structure qui sont le moteur du couplage.
- Les vibrations induites par la turbulence de l'écoulement ou **Turbulence-Induced Vibrations (TIV)** : ici ce sont les fluctuations de chargement liées à l'instationnarité du champ turbulent qui engendrent les vibrations de la structure.
- Les vibrations induites par le mouvement de la structure ou **Motion-Induced Vibrations (MIV)** : c'est le mouvement de la structure qui engendre des modifications dans l'écoulement et ainsi dans le chargement qu'elle perçoit créant un feedback pouvant renforcer le mouvement.

- 1 Introduction
- 2 Formulation du problème général- Analyse dimensionnelle
- 3 Fluide au repos
- 4 Turbulence atmosphérique
- 5 Aéroélasticité
- 6 Tunneling
- 7 Conduites élastiques - Propagation d'ondes
- 8 Méthodes numériques pour l'IFS

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Equations générales pour le fluide et pour le solide

Problème du fluide

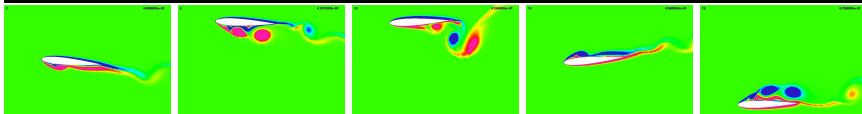
- L'action d'une structure est le plus souvent une frontière (i.e. une paroi) qui limite le domaine.
- La structure interagit avec le fluide par sa géométrie et par des conditions de frontières cinématiques i.e. portant sur la vitesse du fluide, u_f :

▶ Si le fluide est parfait :

$$u_{f\perp} = u_{s\perp}$$

▶ Si le fluide est visqueux :

$$u_f = u_s$$



Le profil de NACA 0012 (cf. NACA 0012)

Le profil est animé d'une combinaison d'un mouvement de pilonnement et d'un mouvement de tanguage. Le profil est considéré comme un solide indéformable.

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Equations générales pour le fluide et pour le solide

Ici, la vitesse du fluide (dans un repère immobile) sur la paroi du profil se déduit facilement de la loi de mouvement du profil dans ce même repère...

- L'action d'un fluide est un chargement appliqué sur les frontières du domaine.
- Le fluide interagit avec le solide en appliquant des contraintes surfaciques de pression et de frottement si le fluide est visqueux. Il y a continuité des contraintes à l'interface :

$$\sigma_s \cdot n_s + \sigma_f \cdot n_f = 0$$

► σ_f et σ_s sont les tenseurs de contrainte de Cauchy du fluide et du solide

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Analyse dimensionnelle

- Pour discerner quels sont les paramètres importants dans une analyse il est bon d'avoir recourt à l'analyse dimensionnelle.
- Pour le fluide et le solide on considère les bilans de :
 - ▶ masse
 - ▶ de quantité de mouvement
- Ainsi si l'on considère un fluide visqueux (newtonien) en écoulement isotherme les équations permettant de décrire son mouvement sont :

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{u}_f) = 0 \quad (1)$$

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} + \rho_f (\mathbf{u}_f \cdot \nabla) \mathbf{u}_f = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_f + \mathbf{f}_{vf} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_f \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\tau}_f = \mu(\nabla \mathbf{u}_f + \nabla \mathbf{u}_f^T) \quad (4)$$

- où :
 - ▶ ρ_f est la masse volumique du fluide et μ sa viscosité
 - ▶ p la pression
 - ▶ \mathbf{u}_f sa vitesse.
 - ▶ $\boldsymbol{\sigma}_f$ est le tenseur des contraintes de Cauchy du fluide et \mathbf{I} le tenseur identité.
 - ▶ $\boldsymbol{\tau}_f$
 - ▶ \mathbf{f}_{vf} des forces volumiques, typiquement le poids : $\rho_f \mathbf{g}$.

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Analyse dimensionnelle

- Pour le solide, supposé avoir un comportement élastique et supposé subir des petites déformations (HPP) isothermes :

$$\rho_s \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \mathbf{f}_{v_s} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \frac{E}{1 + \nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \text{Tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} \right) \quad (6)$$

- où :

- ▶ ρ_s est la masse volumique du solide
- ▶ \mathbf{u}_s le déplacement
- ▶ $\boldsymbol{\sigma}_s$ est le tenseur des contraintes de Cauchy du solide
- ▶ $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_s + \nabla \mathbf{u}_s^T)$ le tenseur des petites déformations
- ▶ E et ν respectivement son module élastique et son coefficient de Poisson
- ▶ \mathbf{f}_{v_s} des forces de volumes.

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Analyse dimensionnelle

- On introduit les grandeurs sans dimension suivantes :

► Pour le fluide :

$$x^+ = \frac{x}{L_f}; \quad u_f^+ = \frac{u_f}{u_{0f}}; \quad p^+ = \frac{p}{\rho_{0f} u_{0f}^2}$$
$$\rho_f^+ = \frac{\rho_f}{\rho_{0f}}; \quad t_f^+ = \frac{t}{T_f}; \quad \tau_f^+ = \tau_f \frac{L_f}{\mu_{0f} u_{0f}}; \quad \mu^+ = \frac{\mu}{\mu_0}$$

► pour le solide :

$$x^+ = \frac{x}{L_s}; \quad u_s^+ = \frac{u_s}{L_s}; \quad t_s^+ = \frac{t}{T_s}$$
$$\rho_s^+ = \frac{\rho_s}{\rho_{0s}}; \quad \sigma_s^+ = \frac{\sigma_s}{E}$$

- L'équation de la conservation de la masse locale du fluide (1) s'écrit alors :

$$\frac{\rho_{0f}}{T_f} \frac{\partial \rho_f^+}{\partial t_f^+} + \frac{\rho_{0f} u_{0f}}{L_f} \nabla_f^+ \cdot (\rho_f^+ u_f^+) = 0$$

soit encore :

$$\frac{L_f}{u_{0f} T_f} \frac{\partial \rho_f^+}{\partial t_f^+} + \nabla_f^+ \cdot (\rho_f^+ u_f^+) = 0$$

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Analyse dimensionnelle

- Il apparaît un groupement sans dimension $\frac{L_f}{u_{0f} T_f}$ appelé nombre de Strouhal, noté St , caractérisant l'instationnarité de l'écoulement :

$$St = \frac{L_f}{u_{0f} T_f} = \frac{\text{temps d'advection}}{\text{temps caractéristique}}$$

- Le même traitement appliqué à l'équation locale de conservation de la quantité de mouvement du fluide (2) fait apparaître les groupements sans dimension suivants :

$$\frac{L_f}{u_{0f} T_f} \rho_f^+ \frac{\partial u_f^+}{\partial t_f^+} + \rho_f^+ (u_f^+ \cdot \nabla_f^+) u_f^+ = -\nabla_f^+ p^+ + \frac{\mu_0}{L_f u_{0f}} \nabla_f^+ \cdot \tau_f^+ - \frac{g L_f}{u_{0f}^2} \rho_f^+ e_z$$

avec $f_{vf} = -\rho_f g e_z$ et en introduisant :

- le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_0 u_0 L_f}{\mu_0} = \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de viscosité}}$
- le nombre de Froude $Fr = \frac{u_0}{\sqrt{g L_f}} = \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de pesanteur}}$

finalement :

$$St \rho_f^+ \frac{\partial u_f^+}{\partial t_f^+} + \rho_f^+ (u_f^+ \cdot \nabla_f^+) u_f^+ = -\nabla_f^+ p^+ + \frac{1}{Re} \nabla_f^+ \cdot \tau_f^+ - \frac{1}{Fr^2} \rho_f^+ e_z$$

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Analyse dimensionnelle

- Pour le solide cela donne avec $f_{v_s} = -\rho_s g e_z$:

$$\rho_s^+ \frac{\partial^2 u_s^+}{\partial t_s^{+2}} = \frac{ET_s^2}{\rho_{0_s} L_s^2} \nabla_s^+ \cdot \sigma_s^+ - \rho_s^+ \frac{g T_s^2}{L_s} e_z$$

où encore en posant : $T_s = \frac{L_s}{\sqrt{\frac{E}{\rho_{0_s}}}}$

$$\rho_s^+ \frac{\partial^2 u_s^+}{\partial t_s^{+2}} = \nabla_s^+ \cdot \sigma_s^+ - \frac{gL_s}{E/\rho_{0_s}} \rho_s^+ e_z$$

ce qui fait apparaître le groupement $\frac{gL_s}{E/\rho_{0_s}}$ que l'on peut écrire :

$$\frac{gL_s}{E/\rho_{0_s}} = \underbrace{\left(\frac{\rho_{0_s}}{\rho_{0_f}}\right)}_{M^{-1}} \underbrace{\left(\frac{\rho_{0_f} u_{0_f}^2}{E}\right)}_{Ca} \underbrace{\left(\frac{gL_f}{u_{0_f}^2}\right)}_{Fr^{-2}} \left(\frac{L_s}{L_f}\right)$$

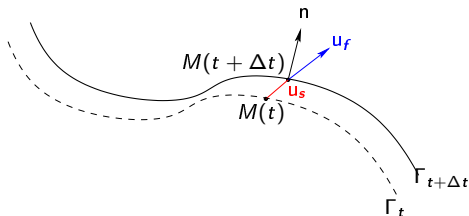
- ▶ $M = \frac{\rho_{0_f}}{\rho_{0_s}}$ le nombre de masse
- ▶ $Ca = \frac{\rho_{0_f} u_{0_f}^2}{E}$ le nombre de Cauchy. $Ca = \frac{\text{Pression dynamique du fluide}}{\text{Module élastique du solide}} \approx$ compare les forces d'inertie aux forces élastiques.
- ▶ $\frac{L_s}{L_f}$ le rapport des longueurs de référence.

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Analyse dimensionnelle - Les nombres sans dimension

- A l'interface fluide solide on a :

$$\begin{cases} \sigma_f n_f = -\sigma_s n_s \\ u_f = \frac{\partial u_s}{\partial t} \end{cases} \quad (7)$$



Soit :

$$\begin{cases} (-p^+ \rho_{0f} u_{0f}^2 l + \frac{\mu_0 u_{0f}}{L_f} \tau_f^+) \cdot n_f = -E \sigma_s^+ \cdot n_s \\ u_{0f} u_f^+ = \frac{\sqrt{E/\rho_{0s}}}{L_s} L_s \frac{\partial u_s^+}{\partial t_s^+} \end{cases}$$

et finalement :

$$\begin{cases} Ca(-p^+ l + \frac{1}{Re} \tau_f^+) \cdot n_f = -\sigma_s^+ \cdot n_s \\ \sqrt{Ca} u_f^+ = \frac{\partial u_s^+}{\partial t_s^+} \end{cases} \quad (8)$$

- Au final le couplage est donc sous le contrôle de plusieurs nombres sans dimension :

▶ le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho_{0f} u_0 L_f}{\mu_0}$

▶ le nombre de masse $M = \frac{\rho_{0f}}{\rho_{0s}}$

▶ le nombre de Cauchy $Ca = \frac{\rho_{0f} u_0^2}{E}$

▶ le nombre de Froude $Fr = \frac{u_0}{\sqrt{g L_f}}$

▶ le nombre de Strouhal $St = \frac{L_f}{u_{0f} T_f}$

▶ le rapport des longueurs de référence $\frac{L_s}{L_f}$

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Analyse dimensionnelle

- Il y a donc parmi ces nombres ceux caractéristiques du comportement du fluide : Re , St , Fr
- celui propre au solide, notamment le groupement : $M^{-1}CaFr^{-2} = \frac{gL_s}{E/\rho_0s}$
- ceux propres à l'interaction : Ca , M et $\frac{L_s}{L_f}$

- On voit immédiatement que pour $Ca \approx 0$ le fluide n'interagit pas avec la structure.
- La condition au limite sur le solide correspond alors à une frontière libre

- L'analyse développée plus haut est une analyse découplée au sens où chaque domaine (fluide ou solide) possède son propre jeu de grandeurs de références.
- A titre d'exercice examiner les groupements sans dimension qui apparaissent lorsque l'on introduit :
 - ▶ une même longueur de référence pour le fluide et le solide L_{ref}
 - ▶ un temps de référence pris égal à celui du solide : $T_{ref} = \frac{L}{\sqrt{E/\rho_0s}}$
- On montre alors qu'apparaît un nouveau nombre sans dimension, $U_R = \frac{u_0f}{\sqrt{E/\rho_0s}}$, appelé vitesse réduite.

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Analyse dimensionnelle - Vitesse réduite

$$U_R^{-1} \rho_f^+ \frac{\partial \mathbf{u}_f^+}{\partial t_f^+} + \rho_f^+ (\mathbf{u}_f^+ \cdot \nabla^+) \mathbf{u}_f^+ = -\nabla^+ p^+ + \frac{1}{Re} \nabla^+ \cdot \boldsymbol{\tau}_f^+ - \frac{1}{Fr^2} \rho_f^+ \mathbf{e}_z$$

$$\rho_s^+ \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s^+}{\partial t_s^{+2}} = \nabla^+ \cdot \boldsymbol{\sigma}_s^+ - Fr^{-2} U_R^2 \rho_s^+ \mathbf{e}_z$$

$$\begin{cases} Ca(-p^+ \mathbf{l} + \frac{1}{Re} \boldsymbol{\tau}_f^+) \cdot \mathbf{n}_f & = \boldsymbol{\sigma}_s^+ \cdot \mathbf{n}_s \\ U_R \mathbf{u}_f^+ & = \frac{\partial \mathbf{u}_s^+}{\partial t_s^+} \end{cases} \quad (9)$$

L'inverse de la vitesse réduite est appelé fréquence réduite, f_r . Cette grandeur compare l'échelle de temps du fluide à celle du solide.

Formulation du problème général - Analyse dimensionnelle

Rôle de la vitesse réduite

- En fonction de la valeur de U_R , vitesse réduite, ou de f_r , la fréquence réduite, vont apparaître différentes catégories de problème d'IFS :

- La vitesse du fluide est considérée négligeable.
- Le problème est assimilé à celui d'un solide plongé dans un fluide initialement au repos.
- Les actions du fluide sur le solide se traduisent essentiellement par des effets de **masse ajoutée**
- Il s'agit essentiellement du domaine de la vibroacoustique

- La vitesse du fluide est très grande devant les vitesses de déformation .
- Le problème solide est quasi statique lorsqu'il est vu avec l'échelle de temps du fluide :
 $T_f \gg T_s$
- C'est typiquement le domaine de l'**aéroélasticité** ou de l'**hydroélasticité**

- Les échelles de temps du fluide et du solide sont comparables
- Il n'est pas possible de découpler les analyses du fluide et du solide
- C'est l'**interaction fluide structure forte**

1 Introduction

5 Aéroélasticité

2 Formulation du problème général- Analyse dimensionnelle

6 Tank sloshing

3 **Fluide au repos**

- Effets du fluide sur la structure - Raideur ajoutée
- Effet de masse ajoutée
- Quelques exemples

7 Conduites élastiques - Propagation d'ondes

8 Méthodes numériques pour l'IFS

4 Turbulence atmosphérique

Fluide au repos

- On considère un solide déformable immergé dans un fluide au repos.
- On recherche quelles sont les actions exercées par le fluide sur le solide au cours de sa déformation.
- Les hypothèses sont :
 - ▶ petits déplacements pour le solide
 - ▶ fluide visqueux incompressible
 - ▶ les déplacements étant faibles autour de la position initiale on linéariserà autour d'un petit paramètre λ
- Le problème est donc défini par les équations (1,2,3,4,5,6)
- On fait pour hypothèse qu'à l'instant initial le tenseur des contraintes du fluide est :

$$\sigma_{0_f} = -p_0 I$$

- Les mouvements de l'interface étant petits on introduit un petit paramètre, λ , tel que l'on exprime le tenseur de contraintes et la vitesse du fluide par :

$$\sigma_f = \sigma_{0_f} + \lambda \hat{\sigma}_f \quad (10)$$

$$u_f = 0 + \lambda \hat{u}_f \quad (11)$$

Fluide au repos

$$U_R \ll 1$$

- Les équations d'évolution du fluide deviennent :

- à l'ordre zéro en λ :

$$0 = -\nabla p_0 - \rho_f g e_z \quad (12)$$

- à l'ordre un en λ :

$$\rho_f \frac{D\hat{u}_f}{Dt} = -\nabla \hat{p} + \mu \Delta \hat{u}_f \quad (13)$$

- A l'interface les équilibres cinématique et dynamique s'écrivent :



$$\hat{u}_f = \frac{\partial u_s}{\partial t} \quad (14)$$



$$\hat{\sigma}_f n = \sigma_s n \quad (15)$$

- En $t = 0$ on a : $dF_0 = \sigma_{0_f} dS = -p_0 dS$
- En t : $df = (\sigma_{0_f} + \lambda \hat{\sigma}_f) ds$ mais évalué dans une position différente puis que l'interface s'est déplacée de X en $x = X + \lambda u_s$

- On pose $df = df_{\chi + \lambda u_s} = dF_0 + \lambda \hat{d}f$
- et $ds = ds_{\chi + \lambda u_s} = dS + \lambda \hat{d}s$
- d'où après quelques calculs :

$$\hat{d}f = \hat{\sigma}_f dS - p_0 \hat{d}s - \nabla p_0 \cdot u_s dS \quad (16)$$

- le premier terme du membre de gauche, $\hat{\sigma}_f dS$, représente la contribution de la contrainte du fluide qui est modifiée au cours du temps.
- le deuxième terme, $-p_0 \hat{d}s$, fait apparaître la contribution due à la déformation de l'interface.
- le dernier terme, $-\nabla p_0 u_s dS$, représente la contribution due au déplacement du solide dans un champ de pression non uniforme.

- ou, en se replaçant dans la configuration de référence :

$$\tau = (\hat{\sigma}_f - p_0(\nabla \cdot u_s I - \nabla u_s^T) - \nabla p_0 u_s) N \quad (17)$$

- avec : N la normale dans la configuration de référence *i.e.* au repos ($dS = N dS$).

Fluide au repos

$$u_R \ll 1$$

- Au final pour la structure la présence du fluide se percevra comme ici une raideur ajoutée *i.e.* proportionnelle au déplacement
 - Le terme en $-p_0(\nabla \cdot \mathbf{u}_s I - \nabla \mathbf{u}_s^T) \mathbf{N}$ rend compte du mouvement de l'interface. On parle de raideur de forme
 - Le terme en $-\nabla p_0 \mathbf{u}_s I \mathbf{N}$ rend compte des modifications du champ de pression c'est la raideur de gradient.
-
- Ces termes peuvent être négatifs conduisant à des **instabilités statiques** par annulation de la raideur.

Bibliographie [2]

Fluide au repos

$U_R \ll 1$ - Effet de masse ajoutée

- Supposons maintenant le fluide parfait.
- On suppose de plus que la dynamique du solide (toujours en HPP) est telle que le déplacement peut s'exprimer :

$$\mathbf{u}_s = q(t)\phi(\mathbf{x})$$

- Les équations pour le fluide et l'interface s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}_f &= 0 \\ \rho_f \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} &= -\nabla p \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f \quad (18)$$

et :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_f \cdot \mathbf{N} &= \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \cdot \mathbf{N} = \dot{q} \phi \cdot \mathbf{N} \\ -p \cdot \mathbf{N} &= \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathbf{N} \end{cases} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \quad (19)$$

- Compte tenu de la linéarité des équations ci-dessus on va chercher des solutions pour le fluide de la forme :

$$\mathbf{u}_f = \dot{q}(t)\phi_u \quad (20)$$

$$p = \ddot{q}(t)\phi_p \quad (21)$$

Fluide au repos

$U_R \ll 1$ - Effet de masse ajoutée

- Dans ces conditions on obtient pour le fluide.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \phi_u &= 0 \\ \rho_f \phi_u &= -\nabla \phi_p \end{cases} \quad \forall x \in \Omega_f \quad (22)$$

- Soit encore simplement :

$$\begin{cases} \Delta \phi_p &= 0 \quad \forall x \in \Omega_f \\ -\frac{1}{\rho_f} \nabla \phi_p \cdot N &= \phi N \quad \forall x \in \partial\Omega_f \end{cases} \quad (23)$$

- Il devient alors intéressant de calculer la projection dans la direction du déplacement des efforts exercés par le fluide sur cette interface. Soit la quantité :

$$f_{I\phi} = \int_{\partial\Omega_f} -p N \phi dS = -\underbrace{\ddot{q} \int_{\partial\Omega_f} \phi_p N \phi dS}_{m_A} \quad (24)$$

Fluide au repos

$U_R \ll 1$ - Effet de masse ajoutée

- Si les mouvements du solide sont pilotés par une équation d'oscillateur

$$m_s \ddot{q} + \eta \dot{q} + kq = 0 \quad (25)$$

- L'effet du fluide est alors ressenti comme une masse additionnelle d'où le nom d'effet de **masse ajoutée**

$$(m_s + m_A) \ddot{q} + \eta \dot{q} + kq = 0 \quad (26)$$

- On montre que l'énergie cinétique du fluide Ec_f s'écrit :

$$Ec_f = \int_{\Omega_f} \frac{\rho_f}{2} u_f^2 dv = \frac{1}{2} m_A \dot{q}^2 \quad (27)$$

- ne correspond pas à la masse d'un système physique particulier fluide ou solide.
- c'est un coefficient qui permet de rendre compte des effets du fluide sur la structure en fonction de l'accélération de celle-ci.

Fluide au repos

$U_R \ll 1$ - Effet de masse ajoutée

- Dans le cas général le mouvement du solide est quelconque.
- Si $\ddot{\mathbf{q}}$ est l'accélération du corps on peut écrire :

$$\mathbf{F} = -\mathbf{A} \cdot \ddot{\mathbf{q}} \quad \text{ou :} \quad F_i = A_{ij} \ddot{q}_j \quad (28)$$

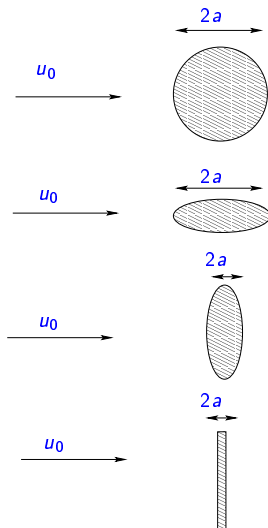
- \mathbf{A} est la matrice de masse ajoutée.

Fluide au repos

$U_R \ll 1$ - Effet de masse ajoutée

- Masse ajoutée pour des écoulements potentiels 2D

$$m_A = \pi \rho_f a^2$$



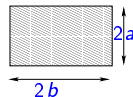
Fluide au repos

$U_R \ll 1$ - Effet de masse ajoutée

- Masse ajoutée pour des écoulements potentiels 2D

$a/b = \infty$	$m_A = \pi \rho_f a^2$
$a/b = 10$	$m_A = 1.14 \pi \rho_f a^2$
$a/b = 5$	$m_A = 1.21 \pi \rho_f a^2$
$a/b = 2$	$m_A = 1.36 \pi \rho_f a^2$
$a/b = 1$	$m_A = 1.51 \pi \rho_f a^2$
$a/b = \frac{1}{2}$	$m_A = 1.70 \pi \rho_f a^2$
$a/b = \frac{1}{5}$	$m_A = 1.98 \pi \rho_f a^2$
$a/b = \frac{1}{10}$	$m_A = 2.23 \pi \rho_f a^2$

u_0 →



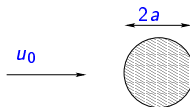
D'après Wendel K., Hydrodynamics masses and moments of inertia, 1962, DTMB Translation 260, Fundamental of Acoustics, J. Wiley and Sons, NY.

Fluide au repos

$U_R \ll 1$ - Effet de masse ajoutée

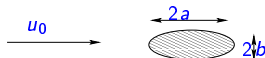
- Masse ajoutée pour des écoulements potentiels 3D

$$m_A = \frac{2}{3}\pi\rho_f a^2$$



a/b	K Trans. Horiz.	K Trans. vert.
1.00	0.500	0.500
1.50	0.305	0.621
2.00	0.209	0.702
2.51	0.156	0.763
2.99	0.122	0.803
3.99	0.082	0.868
4.99	0.059	0.895
6.01	0.045	0.918
6.97	0.036	0.933
8.01	0.029	0.945
9.02	0.024	0.954
9.97	0.021	0.960

$$m_A = \frac{4}{3}K\pi\rho_f ab^2$$



1 Introduction

2 Formulation du problème général- Analyse dimensionnelle

3 Fluide au repos

4 Turbulence atmosphérique

- Le vent

5 Aéroélasticité

6 Torsion et flambement

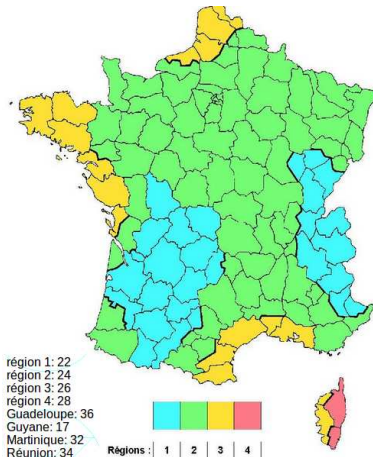
7 Conduites élastiques - Propagation d'ondes

8 Méthodes numériques pour l'IFS

Le vent

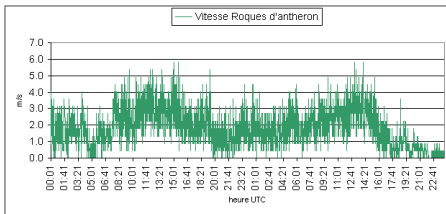
Le vent

- Le vent caractéristique est une donnée importante dans la conception d'ouvrage d'art.
- C'est la donnée qui sera prise en compte dans le dimensionnement pour définir la résistance de l'ouvrage d'art ou de la structure.
- Par exemple ci dessous carte des régions de vent en France telle que définie par l'Eurocode EN1991-1-4 NA (AFNOR Pr NF P06-114-1/NA mars 2008). Le vent est en m/s.



La vitesse du vent

- La vitesse du vent varie bien sur en fonction du temps et de la position
- On distingue une variation lente qui est associée à celle du champ de pression atmosphérique (effets de la météo) et une variation rapide qui est associée à la turbulence.



- On définit la vitesse du vent par :

$$U(t, z) = \begin{pmatrix} U(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} \quad (29)$$

- z est l'altitude du lieu considéré, U la vitesse moyenne horizontale (intégrée sur une durée allant de 1mn à 1hr)
- u , v et w sont les fluctuations de vitesse dans respectivement la direction moyenne du vent la direction perpendiculaire horizontale et la direction verticale.

Vitesse moyenne du vent

Vitesse moyenne

- La vitesse moyenne du vent $U(z)$ dépend de la hauteur au sol considérée et de la rugosité du relief.
- En site plat on utilise la loi log pour la couche limite atmosphérique :

$$U(z) = U_{ref} k(z_0) \log\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (30)$$

où :

- $k(z_0)$ est un coefficient de rugosité et z_0 la hauteur de rugosité.

Classes de rugosité (selon Eurocode)	z_0 (m)	$k(z_0)$	U_{10}/U_{ref}	k_r
Mer, lac (étendue > 5km)	0.005	0.16	1.22	0.16
Rase campagne avec obstacles isolés, aéroport	0.05	0.189	1	0.19
Campagne avec haies, petit bois, habitat dispersé	0.2	0.21	0.82	0.20
Zone urbaine, industrielle, forêt	0.75	0.23	0.6	0.21
Zones urbaines avec 15% de la surface avec $H > 15m$	2	0.25	0.4	0.21

Table 1 – Valeur des paramètres pour la CLA (d'après [1])

- U_{10} est par convention la vitesse du vent mesurée à $z = 10m$ et moyennée sur une durée de 10mn.

Le vent

Couche limite atmosphérique

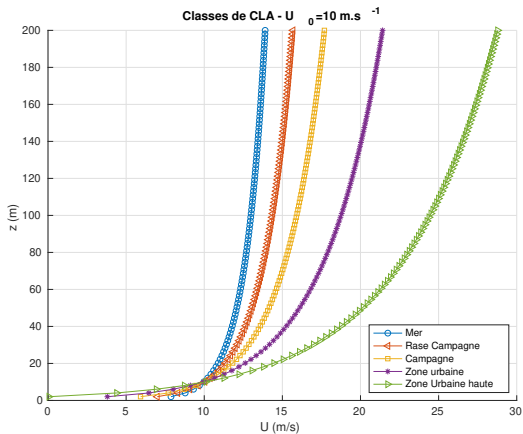


Figure 9 – Atmospheric boundary layer for different landscape types

Intensité de turbulence

Intensité de turbulence

- L'intensité de turbulence est définie par :

$$I(z) = \frac{\sigma_u}{U(z)} \quad (31)$$

où :

- σ_u est la valeur RMS de la fluctuation $u(t)$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt \quad (32)$$

- avec toujours $10mn < T < 1hr$
- σ_u varie peu avec z mais elle dépend de la vitesse du vent et de la rugosité. On pose :

$$\sigma_u = k_r \cdot U_{ref} \quad (33)$$

avec k_r donné dans la table 1

Spectre de la turbulence

Densité spectrale

- Pour rechercher d'éventuels effets résonants sur les structures soumises à l'action du vent il faut pouvoir estimer la densité spectrale.
- Deux formules empiriques sont généralement retenues.

L'expression de Von Karman :

$$S_u(n) = \frac{4 \frac{\ell_u^x}{U(z)}}{(1 + 70.7 (\frac{n \ell_u^x}{U(z)})^2)^{\frac{5}{6}}} \sigma_u^2 \quad (34)$$

et celle de Kaimal :

$$S_u(n) = \frac{17 \frac{z}{U(z)}}{(1 + 33 \frac{nz}{U(z)})^{\frac{5}{3}}} \sigma_u^2 \quad (35)$$

- ℓ_u^x est une échelle longitudinale de la turbulence obtenue par interpolation sur les spectres issus de mesure.
- Pour les deux autres composantes de la vitesse il existe également des corrélations dues à von Karman

$$S_i(n) = 4 \frac{\ell_i^x}{U(z)} \frac{1 + 188.4(2f_i)^2}{(1 + 70.7(2f_i)^2)^{\frac{11}{6}}} \sigma_i^2 \quad i = (2, 3) \quad (36)$$

avec $f_i = \frac{n \ell_i^x}{U(z)}$ et $\ell_v^x \approx 0.3 L_v^x$ et $\ell_w^x \approx 0.4 L_w^x$. L_i^x est l'échelle de corrélation spatiale.

Représentation des densités spectrales

Densité spectrale

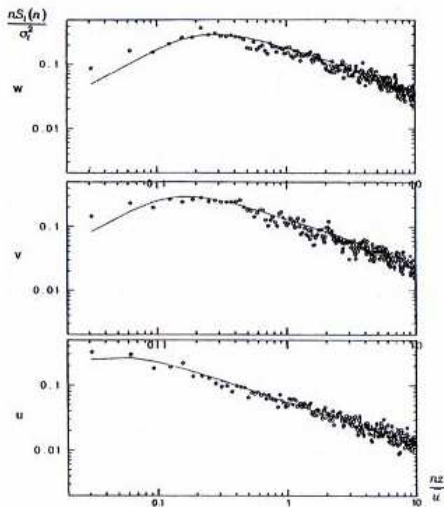


Figure 10 – Comportement au vent des ponts, G. Cremona (2002)

Fonction de cohérences

Cohérence spatiale

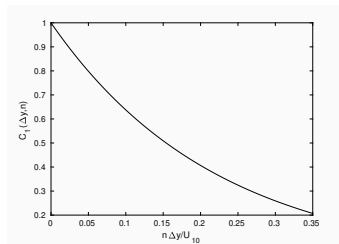
- Les fonctions de cohérence permettent de définir la dimension spatiale des rafales de vent qui excitent un ouvrage
- Pour des grands ouvrages, la rafale ne va pas induire des efforts sur l'ensemble de la structure ce qui en limite l'influence

La fonction de cohérence est définie à partir de la TF de la fonction d'intercorrélation spatiale. Elle se calcule à partir de la relation suivante :

$$C_i(r, r + \Delta r, n) = \exp(-C_i^r \frac{n\Delta r}{U(z)}) \quad (37)$$

où :

- $C_i(r, r + \Delta r)$ est la fonction de cohérence à la distance Δr du point r
- C_i^r le coefficient de cohérence dans la direction i (voir tableau 2)



Quelques modèles de vent

d'après Comportement au vent des ponts, G. Cremona (2002)

Composante i	l_i	ℓ_i^x (m)	L_i^y (m)	L_i^z (m)	C_i^y	C_i^z
u	0.09	200	85	40	11	11
v	0.075	65	95	30	4.5	4.5
w	0.05	35	35	20	12	12

Table 2 – Vent de mer ($z_0 = 0.005m$) à $z = 65m$

Composante i	l_i	ℓ_i^x (m)	L_i^y (m)	L_i^z (m)	C_i^y	C_i^z
u	0.145	100	50	40	10	10
v	0.120	45	40	30	5	5
w	0.08	30	20	20	10	10

Table 3 – Vent de campagne ($z_0 = 0.07m$) à $z = 65m$

Composante i	l_i	ℓ_i^x (m)	L_i^y (m)	L_i^z (m)	C_i^y	C_i^z
u	0.16	250	90	90	12	12
v	0.16	70	100	100	12	12
w	0.12	30	40	40	9	9

Table 4 – Vent de montagne ($z = 270m$) (effet de la rugosité non sensible)

1 Introduction

2 Formulation du problème général- Analyse dimensionnelle

3 Fluide au repos

4 Turbulence atmosphérique

5 **Aéroélasticité**

- Introduction

- Effets de signature

- Phénomène de divergence en torsion

- Galop - Instabilité par crise de traînée - Critère

- Critère de den Hartog et galop

- Flottement

6 Tank sloshing

7 Conduites élastiques - Propagation d'ondes

8 Méthodes numériques pour l'IFS

Aéroélasticité

- Les progrès en aéroélasticité ont été dans un premier temps intrinsèquement liés au développement de l'aéronautique
- Grande difficulté, avec les moyens techniques des premiers constructeurs d'avions, de concevoir des voilures suffisamment rigides en torsion
- Les architectures de type bi-plan voire tri-plan ont été ainsi retenues dans les premiers temps à cause de leur plus grande rigidité en torsion comparée aux voilures de type monoplan.
- Depuis la seconde guerre mondiale développement de voilure à peau métallique (plaque de métal rivetée)

L'aéroélasticité est la science qui étudie les interaction entre les forces d'inertie, les forces aérodynamiques et les forces élastiques

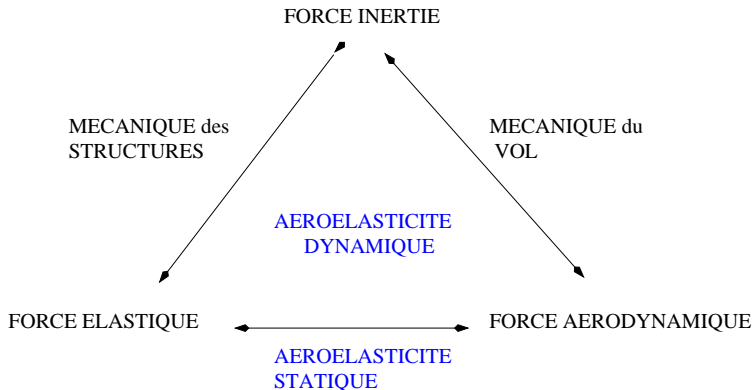


Figure 11 – Le triangle de A.R. Collar

Aéroélasticité

Aéroélasticité quasi-statique et aéroélasticité dynamique

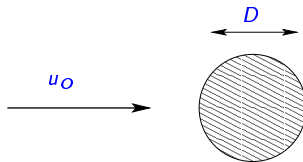
- Le domaine de l'aéroélasticité correspond à celui des grandes vitesses réduites, $U_R \gg 1$ ou des petites fréquences réduites $f_r \ll 1$
- Ici, en terme d'échelle de temps, c'est celle du fluide qui est prépondérante devant celle du solide $T_f \ll T_s$
- Une des approches pouvant être retenue pour étudier ce couplage est de considérer que la dynamique du solide ne modifie pas celle du fluide et qu'une approche quasi-stationnaire pour le fluide est suffisante.
- Quelques phénomènes courants en **aéroélasticité statique (ou quasi-statique)** :
 - ▶ Balancement d'ouvrage de génie civil
 - ▶ Divergence des ailes d'avions
 - ▶ Inversion de commande et redistribution de portance
- Lorsque les mouvements du solide interagissent avec l'écoulement et modifient sa structure même les forces aérodynamiques ne peuvent plus être déduites d'une approche stationnaire (quasi-statique) et l'on se doit d'étudier le couplage entre le fluide et le solide. C'est le domaine de l'**aéroélasticité dynamique**.
- L'un des phénomènes d'aéroélasticité dynamique le plus étudié est le flottement (flutter) des corps minces.

L'écoulement autour d'un cylindre

Une géométrie simple mais des écoulements très variés

- On considère l'écoulement autour d'un cylindre d'envergure infinie d'un fluide

- ▶ incompressible
- ▶ visqueux newtonien



- On classe l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds : $Re_D = \frac{\rho u_0 D}{\mu}$
- Une donnée intéressante est la traînée (par unité d'envergure) exercée par le fluide sur le cylindre :

$$T = \int_{\Gamma_{cyl}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} = \underbrace{\int_{\Gamma_{cyl}} -p \mathbf{n} \cdot d\mathbf{x}}_{\text{traînée de forme}} + \underbrace{\int_{\Gamma_{cyl}} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{u}^T) \cdot \mathbf{n} \cdot d\mathbf{x}}_{\text{traînée de frottement}}$$

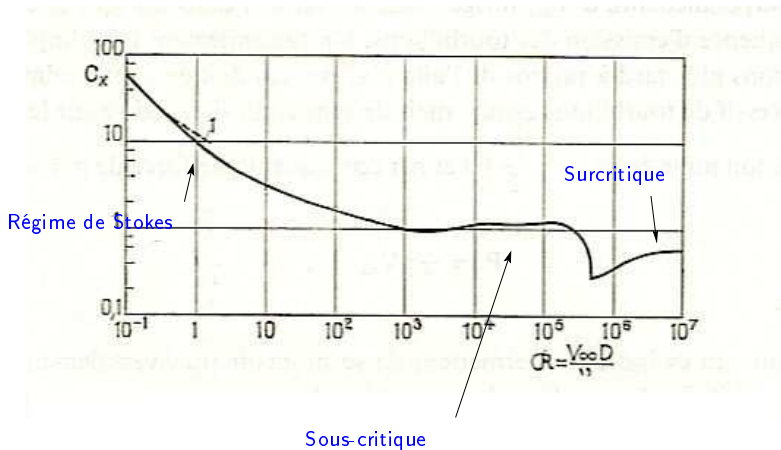
- C'est la résultante des efforts de pression et de frottement
- Il est habituel d'utiliser une traînée sans dimension représentée par le coefficient de traînée C_x

$$T = \frac{1}{2} \rho u_0^2 C_x D$$

- On s'affranchit des dimensions du cylindre, du fluide etc mais $C_x = C_x(Re_D)$

L'écoulement autour d'un cylindre

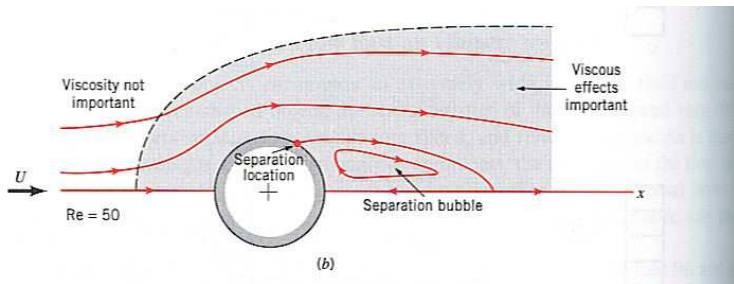
Evolution du coefficient de traînée d'un cylindre



L'écoulement autour d'un cylindre

Les différents régimes d'écoulement

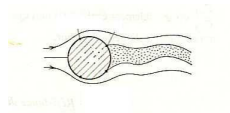
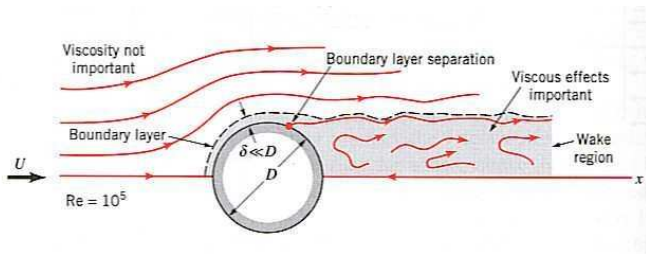
- Le régime sous-critique
- Écoulement décollé $Re_D > 10$



L'écoulement autour d'un cylindre

Les différents régimes d'écoulement

- Les régimes de transition et sur-critique
- Ecoulement décollé $Re_D \geq 5 \cdot 10^5$



L'écoulement autour d'un cylindre

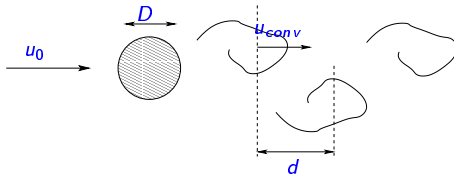
Instationnarité de sillage

- On parle d'effets de sillage ou d'**excitation de sillage ou de signature** lorsque les pressions et forces exercés par l'écoulement sur l'obstacle varient dans le temps à cause de la formation de structures tourbillonnaires.
- Soit f la fréquence de détachement tourbillonnaire :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{u_{conv}}{d} = \frac{\text{vitesse de convection des tourbillons}}{\text{distance entre deux tourbillons}}$$

- On peut réécrire le Strouhal :

$$St = \frac{u_{conv} D}{u_0 d} = \frac{f \cdot D}{u_0}$$



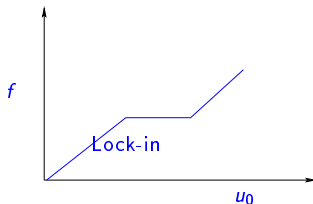
L'écoulement autour d'un cylindre

Résonance et effet de lock-in

- La structure est excitée par les sollicitations aérodynamiques
- Le danger est que la fréquence de ces sollicitations corresponde à une fréquence de résonance de la structure
- Si f_r est cette fréquence on peut calculer la vitesse pour laquelle elle apparaît :

$$u_0 = \frac{D \cdot f_r}{St}$$

- On s'aperçoit expérimentalement que une fois sollicitée f_r pilote le phénomène de détachement tourbillonnaire. Ce qui rend le phénomène d'autant plus dangereux.
- En outre, le mouvement du cylindre modifie la forme de l'écoulement et induit des fortes variations sur les coeff aérodynamiques ce qui limite l'approche linéaire et quasi-statique de ce phénomène.



Strouhal de formes usuelles

Forme	Type	St
○	$Re_D < 10^5$	0.19-0.20
○	$Re_a > 10^5$	0.3
□	carré	0.127
	rectangle 2 : 1	0.087
	rectangle 5 : 1	0.1
	plaque	0.16
◁	triangle	0.17
H	section H en carré	0.120
H	H en 5 : 1	0.108
⊔	U carré droit	0.126
	U carré couché	0.125
I	section en I	0.145

Aérodynamique quasi-statique

Divergence en torsion des ailes

- On considère une aile d'avion mobile en tangage (torsion) autour d'un point pivot P représentant le centre élastique de l'aile

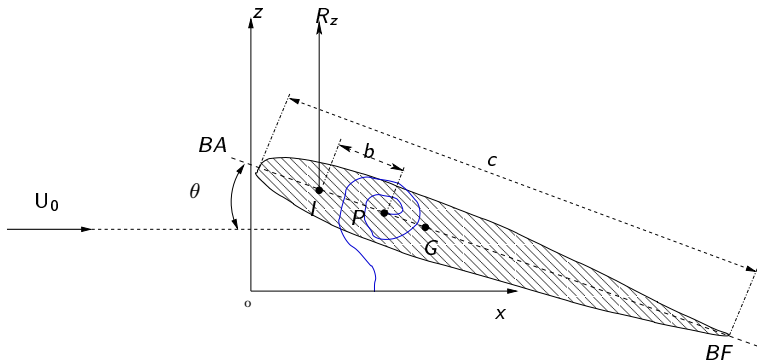


Figure 12 – BA : bord d'attaque - BF : bord de fuite.

- Le moment des forces aérodynamiques exercé au foyer ou centre aérodynamique s'écrit :

$$M_I = \frac{1}{2} \rho U_0^2 C_{M_I} c^2 e$$

où :

- ▶ ρ est la masse volumique de l'air
 - ▶ U_0 le module de la vitesse amont
 - ▶ C_{M_I} le coefficient de moment au foyer I
 - ▶ c la corde de l'aile
 - ▶ e son envergure
- La portance, R_z est donnée par :

$$R_z = \frac{1}{2} \rho U_0^2 C_z c e$$

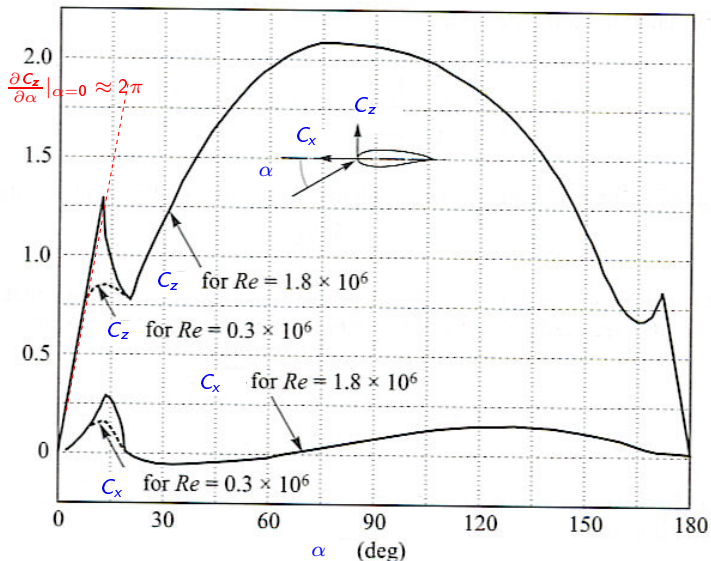
où :

- ▶ C_z est le coefficient de portance du profil.

Aérodynamique quasi-statique

Divergence en torsion des ailes

- Coefficients aérodynamiques d'un profil **NACA0012**



Aéroélasticité quasi-statique

Divergence en torsion des ailes

- Polaire du profil **NACA0012**

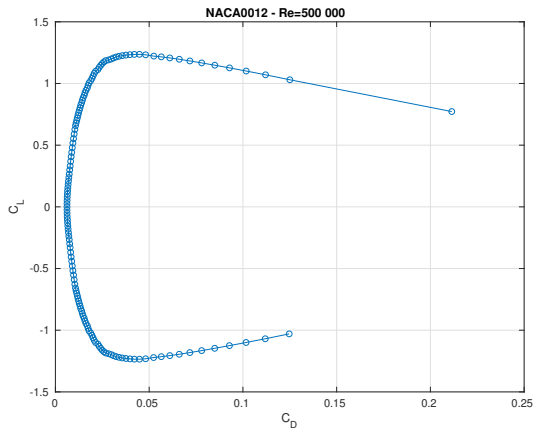


Figure 13 – Polaire du profil NACA0012 à $Re = 500000$ (Calcul XFOil)

Aérodélasticité quasi-statique

Divergence en torsion des ailes

- Le moment des forces aérodynamiques en P , centre élastique de l'aile où s'exerce la force de torsion, s'écrit :

$$M_P^a = M_I + PI \wedge R_z$$

soit :

$$M_P^a = \frac{1}{2} \rho U_0^2 C_{M_I} c^2 e - \frac{1}{2} \rho U_0^2 C_z c e b$$

avec :

- ▶ $PI \approx b_x$ (en supposant α petit)
 - ▶ $R_z = \frac{1}{2} \rho U_0^2 C_z c e z$
- soit encore en notant que pour les profils minces et les petites valeurs de l'angle d'attaque α on a $C_z \approx 2\pi\alpha$:

$$M_P^a = \frac{1}{2} \rho U_0^2 (C_{M_I} c - 2\pi b \alpha) c e$$

Aéroélasticité quasi-statique

Divergence en torsion des ailes

- Le moment total en P est donc :

$$M_P = \frac{1}{2} \rho U_0^2 (C_{M_I} c - 2\pi b \alpha) c e - k \theta$$

avec :

- ▶ k la raideur en torsion de l'aile
- ▶ θ l'angle de torsion réel de l'aile
- On pose : $\alpha = \alpha_0 + \theta$
 - ▶ α_0 est l'angle d'incidence pour un couple de rappel élastique nul

- On peut donc exprimer le moment total M_P en P par :

$$M_P = \frac{1}{2} \rho U_0^2 (C_{M_I} c - 2\pi b \alpha) c e - k(\alpha - \alpha_0)$$

$$M_P = \frac{1}{2} \rho U_0^2 C_{M_I} c^2 e - \alpha \left(\frac{1}{2} \rho U_0^2 2\pi c e b + k \right) + k \alpha_0$$

- A l'équilibre on a $M_P = 0$ soit :

$$\frac{1}{2} \rho U_0^2 (C_{M_I} c - 2\pi b \alpha) c e = k(\alpha - \alpha_0)$$

Soit :

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2} \rho U_0^2 C_{M_I} c^2 e + k \alpha_0}{k + \frac{1}{2} \rho U_0^2 2\pi c e b}$$

- L'équilibre est stable tant que :

$$\frac{\partial M_P}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \rho U_0^2 2\pi b - k < 0$$

- L'équilibre est stable tant que :

$$\frac{\partial M_P}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2}\rho U_0^2 2\pi b - k < 0$$

- Une augmentation de α donnera un moment négatif **piqueur** qui ramènera l'aile (l'avion) à une incidence moindre.
- Cela est toujours vérifié si $b > 0$ c'est-à-dire lorsque le foyer est en arrière du centre de torsion (si l'on considère le BA comme l'avant)
- Un centrage "arrière" est donc une configuration stable.
- Pour un avion le centre de rotation à considérer est le centre de masse.

Aéroélasticité quasi-statique

Marge statique

- La distance entre le centre de masse et le foyer s'appelle la marge statique
- Elle est comptée positivement lorsque le CM est devant le foyer et s'exprime en pourcentage de la corde

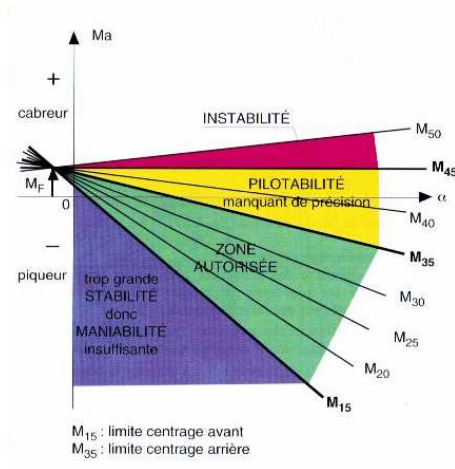


Figure 14 – Marge statique de l'Airbus A300 (Source Aerospatiale)

Aérodélasticité quasi-statique

Divergence en torsion des ailes

L'angle d'équilibre est donné par :

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\rho U_0^2 C_{M_I} c^2 e + k\alpha_0}{k + \frac{1}{2}\rho U_0^2 2\pi c e b}$$

- Lorsque la vitesse augmente α tend vers la valeur : $\frac{C_{M_I} c}{2\pi b}$

- α diverge pour $-\frac{1}{2}\rho U_0^2 2\pi b = k$
- Soit une vitesse amont $U_0 = \sqrt{\frac{-2k}{\rho 2\pi c e b}}$
- Cette vitesse est appelée vitesse de divergence

L'instabilité qui prend naissance lorsque la raideur du système s'annule est appelée **instabilité statique** car elle ne dépend que de la raideur du système et non pas de son inertie.

Aéroélasticité quasi-statique

Galop - Instabilité par crise de traînée

- On considère un corps soumis à un écoulement à la vitesse U_0
- Le corps est susceptible de se déplacer dans la direction de l'écoulement, soit suivant l'axe Ox . Ce type de mouvement est qualifié de **cavalement**.

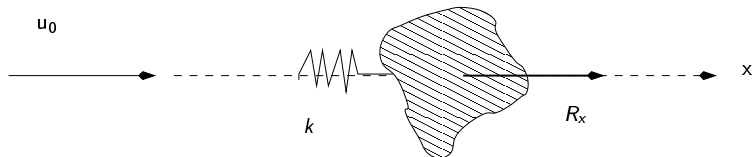


Figure 15 – Instabilité par crise de traînée

- On assimile la rigidité le long de l'axe Ox à un ressort de raideur k .
- L'écoulement exerce sur le corps une force de traînée :

$$R_x = \frac{1}{2} \rho (U_0 - \dot{x})^2 C_x S$$

avec :

- ▶ \dot{x} la vitesse du corps le long de l'axe Ox
- ▶ C_x le coefficient de traînée du corps
- ▶ S le maître couple du corps dans le plan perpendiculaire à Ox

Aérodélasticité quasi-statique

Galop - Instabilité par crise de traînée

- Le coefficient de traînée évolue avec le nombre de Reynolds. On a donc $C_x = C_x(Re_{U_0 - \dot{x}})$ avec $Re_{U_0 - \dot{x}} = \frac{\rho(U_0 - \dot{x})L}{\mu}$ où L est la longueur caractéristique du corps.
- Le principe fondamental de la dynamique appliqué au corps s'écrit, en projection sur Ox :

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0) + \frac{1}{2}\rho(U_0 - \dot{x})^2 C_x(Re_{U_0 - \dot{x}})S$$

où m est la masse du corps

- En supposant la vitesse propre du corps de faible amplitude par rapport à celle du fluide (on rappelle que $U_R \gg 1$), on pose :

$$R_x = R_x(\dot{x}_0) + (\dot{x} - \dot{x}_0) \left(\frac{\partial R_x}{\partial \dot{x}} \right)_{\dot{x}_0} + O(2)$$

avec $\dot{x}_0 = 0$

- Soit :

$$R_x \approx \frac{1}{2}\rho U_0^2 C_x S - \frac{1}{2}\rho U_0 S \left(2C_x + Re \frac{\partial C_x}{\partial Re} \right) \dot{x}$$

- ▶ avec $Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu}$
- ▶ et en notant que :

$$\left(\frac{\partial R_x}{\partial \dot{x}} \right)_{\dot{x}_0=0} = \frac{\partial R_x}{\partial Re} \left(-\frac{\rho L}{\mu} \right)$$

Aérodélasticité quasi-statique

Galop - Instabilité par crise de traînée

- On obtient donc l'équation linéarisée de la dynamique du corps selon Ox :

$$m\ddot{x} + \frac{1}{2}\rho U_0 S \left(2C_x + Re \frac{\partial C_x}{\partial Re} \right) \dot{x} + kx - \frac{1}{2}\rho U_0^2 C_x S = 0$$

- Les forces aérodynamiques engendrent donc sur la dynamique du corps un effet d'amortissement de coefficient :

$$\eta = \frac{1}{2}\rho U_0 S \left(2C_x + Re \frac{\partial C_x}{\partial Re} \right)$$

- L'écoulement amortit les librations du corps tant que la quantité $2C_x + Re \frac{\partial C_x}{\partial Re}$ demeure positive.

- Lorsque :

$$\frac{\partial C_x}{\partial Re} < -\frac{2C_x}{Re}$$

- le coefficient d'amortissement devient négatif et le fluide communique de l'énergie au corps et amplifie exponentiellement ses mouvements
- Cette dernière inégalité est appelée critère de den Hartog

- Un exemple avec un cylindre infiniment long. La courbe du C_x présente une "crise" à la transition laminaire vs turbulent.
- Le critère de crise traînée (calculé à partir de données expérimentales) est vérifié autour de $Re = 4 - 5 \cdot 10^5$

Pour un cylindre infiniment long :

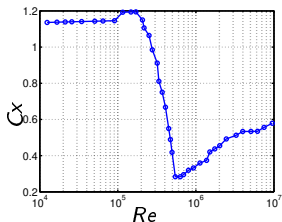


Figure 16 – Coefficient de traînée d'un cylindre autour de la zone de critique

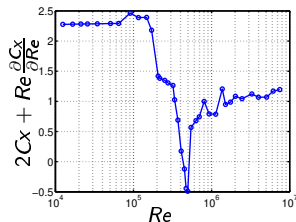
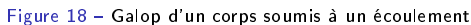


Figure 17 – Coefficient de traînée d'un cylindre autour de la zone critique

Galop en pilonnement

- Le mouvement de translation verticale s'effectue à la vitesse \dot{z}
- Le vent apparent auquel est soumis le corps est : $u_a = u_0 - \dot{z}$



- La présence de ce vent apparent entraîne une modification :

- ▶ du module de la vitesse perçue par le corps $u_a = \sqrt{u_0^2 + \dot{z}^2}$
- ▶ de l'angle d'incidence de cette vitesse sur le corps.

$$\alpha = -\tan^{-1} \frac{\dot{z}}{u_0}$$

- L'équation de la dynamique du corps s'écrit, en projection sur $0z$:

$$m\ddot{z} + k(z - z_0) = R_z$$

- En introduisant la portance, R_z , et la traînée, R_x , définies sur les axes respectivement perpendiculaire et parallèle **au vent apparent**, on obtient :

$$m\ddot{z} + k(z - z_0) = \frac{1}{2} \rho u_a^2 S (-\sin \alpha C_x + \cos \alpha C_z)$$

- La vitesse réduite U_R étant toujours importante on a $U_R^{-1} = \frac{|\dot{z}|}{u_0} \ll 1$ et l'on peut poser :

$$\alpha = -\tan^{-1} \left(\frac{\dot{z}}{u_0} \right) \approx -\frac{\dot{z}}{u_0} + \frac{1}{3} \left(\frac{\dot{z}}{u_0} \right)^3$$

- Soit après quelques calculs et en linéarisant au premier ordre en $\frac{\dot{z}}{u_0}$:

$$m\ddot{z} + k(z - z_0) = \frac{1}{2}\rho u_0^2 S \left(c_z(0) - \frac{\dot{z}}{u_0} \left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}(0) + C_x(0) \right) \right)$$

- ou encore :

$$m\ddot{z} + \frac{1}{2}\rho u_0 S \left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}(0) + C_x(0) \right) \dot{z} + k(z - z_0) = \frac{1}{2}\rho u_0^2 S C_z(0)$$

- On retrouve un coefficient d'amortissement, $\eta = \frac{1}{2}\rho u_0 S \left(\frac{\partial C_z}{\partial \alpha}(0) + C_x(0) \right)$, dont le signe permet de prédire :
 - ▶ un comportement stable avec amortissement si il est positif
 - ▶ un comportement instable avec amplification si il est négatif

Aérodélasticité quasi-statique

Galop en pilonnement

- L'approche ici retenue est une approche quasi-statique où les coefficients aérodynamiques sont déterminés pour une structure immobile (alors qu'elle bouge !!)
- Il convient donc de considérer des mouvements de la structure lents
- Classiquement plusieurs critères sont introduits
- Bearman, Gartshore, Maull & Parkinson (1989) propose :

$$\frac{U_0}{f_n L} > 30$$

où U_0 est la vitesse du fluide, f_n la fréquence des détachements tourbillonnaires dans le sillage du corps et L une dimension caractéristique du corps.

- Un exemple avec un octogone infiniment long.

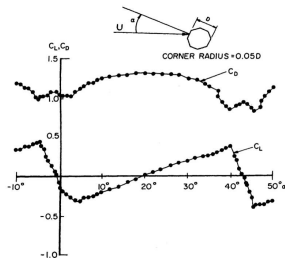


Figure 19 – Coefficients aérodynamiques d'un octogone d'après [3]

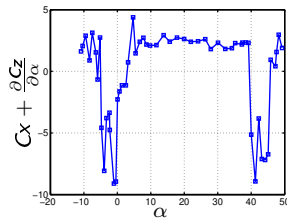


Figure 20 – Critère de de den Hartog pour un octogone

Aéroélasticité quasi-statique

Flexion-Torsion des ailes ou flottement (flutter)

- En plus du mouvement de tangage on superpose maintenant un pilonnement.

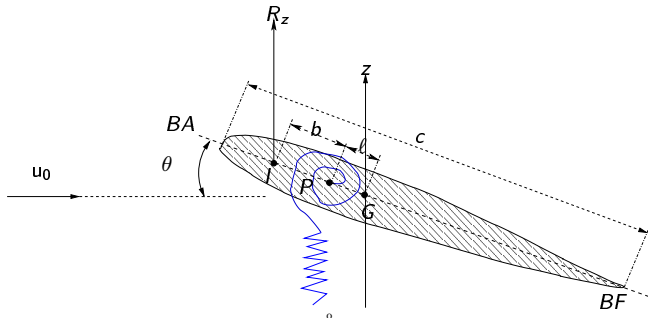


Figure 21 – BA : bord d'attaque - BF : bord de fuite.

- On néglige, en supposant que $\frac{|\dot{z}|}{u_0} \ll 1$, l'influence du vent apparent sur la répartition des forces aérodynamiques.
- Le profil est donc sous la dépendance des deux équations de mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{z} - m\ell\ddot{\theta} + kz &= R_z \\ J\ddot{\theta} + C\theta &= M_I - m\ell\ddot{z} \end{cases} \quad (38)$$

où :

- ▶ J le moment d'inertie par rapport à P le centre élastique
- ▶ C et k respectivement, la raideur de torsion et la raideur de pilonnement.
- ▶ R_z la force aérodynamique ($F = \frac{1}{2}\rho U_0^2 C_z c$)
- ▶ z l'amplitude du pilonnement
- ▶ ℓ la distance entre G , le centre de gravité, et P l'axe de torsion
- ▶ b la distance entre I le foyer et P

- On obtient donc le système :

$$\begin{cases} m\ddot{z} - m\ell\ddot{\theta} + kz - \frac{1}{2}\rho U^2 c C_z &= 0 \\ J\ddot{\theta} + m\ell\ddot{z} + C\theta - \frac{1}{2}\rho U^2 c^2 C_M &= 0 \end{cases} \quad (39)$$

- On linéarise encore les forces aérodynamiques en écrivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho U^2 c C_z &= \frac{1}{2}\rho U^2 c \frac{dC_z}{d\alpha} \alpha \\ \frac{1}{2}\rho U^2 c^2 C_M &= \frac{1}{2}\rho U^2 c^2 \frac{dC_M}{d\alpha} \alpha \end{cases} \quad (40)$$

où $\alpha = \theta + \alpha_0$ est l'angle d'attaque réel du profil

- Soit en introduisant $C'_M = \frac{dC_M}{d\alpha}$, $C'_z = \frac{dC_z}{d\alpha}$

$$\begin{cases} m\ddot{z} - m\ell\ddot{\alpha} + kz - \frac{1}{2}\rho U^2 c C'_z \alpha &= 0 \\ J\ddot{\alpha} + m\ell\ddot{z} + C\alpha - \frac{1}{2}\rho U^2 c^2 C'_M \alpha &= C\alpha_0 \end{cases} \quad (41)$$

- On peut ré-écrire à nouveau ce système en introduisant les fréquences propres des mouvements de torsion et de flexion pris séparément : $\omega_z = \sqrt{k/m}$ et $\omega_\alpha = \sqrt{C/J}$

- Soit :

$$\begin{cases} \ddot{z} - \ell \ddot{\alpha} + \omega_z^2 z - \frac{1}{2m} \rho U^2 c C'_z \alpha & = 0 \\ \ddot{\alpha} + \frac{m\ell}{J} \ddot{z} + \omega_\alpha^2 \alpha - \frac{1}{2J} \rho U^2 c^2 C'_M \alpha & = \frac{c}{J} \alpha_0 \end{cases} \quad (42)$$

- En introduisant :

$$X = \begin{bmatrix} z \\ \alpha \end{bmatrix}$$

On peut ré-écrire le système précédent comme : $M\ddot{X} + KX + F = 0$ avec :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\ell \\ \frac{m\ell}{J} & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} \omega_z^2 & -\frac{\rho U^2 c}{2m} C'_z \\ 0 & \omega_\alpha^2 - \frac{\rho U^2 c^2}{2J} C'_M \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{c}{J} \alpha_0 \end{bmatrix}$$

- Pour étudier la stabilité du système on introduit une solution de type harmonique $X = X_0 e^{\lambda t}$. Le système devient :

$$\lambda^2 M X + K X = F$$

- On recherche les vecteurs propres de la matrice associée à l'équation homogène : $\lambda^2 M + K$ soit :

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 + \omega_z^2 & -\lambda^2 \ell - \frac{\rho U^2 c}{2m} C'_z \\ \lambda^2 \frac{m\ell}{J} & \lambda^2 + \omega_\alpha^2 - \frac{\rho U^2 c^2}{2J} C'_M \end{bmatrix} \quad (43)$$

- Soit à résoudre : $A\lambda^4 + B\lambda^2 + C = 0$ avec :

$$A = 1 + \frac{m\ell^2}{J}, \quad B = \omega_\alpha^2 + \omega_z^2 + \frac{\rho U^2 c}{2J} (\ell C'_z - c C'_M) \quad \text{et} \quad C = \omega_z^2 (\omega_\alpha^2 - \frac{\rho U^2 c^2}{2J} C'_M)$$

- A et C sont positifs si l'on considère que la vitesse de divergence en torsion est supérieure à la vitesse critique de flottement. Autrement dit $C < 0$ pour une vitesse qui est supérieure à celle que l'on recherche.
- Les valeurs propres sont données par :

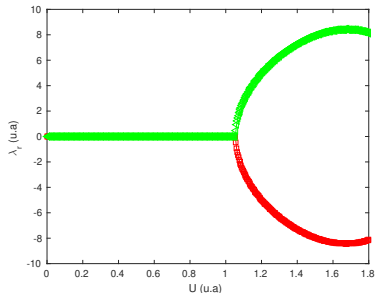
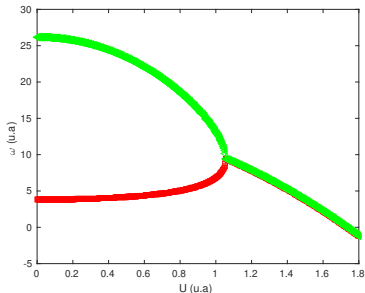
$$\lambda^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

- Si $B > 0$ et $B^2 > 4AC$, $\lambda^2 < 0$ et est réelle soit $\lambda \in \text{Im}(\mathbb{C})$
- Si $B^2 < 4AC$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et si $\text{Re}(\lambda) > 0$ il y a amplification du mouvement

Aéroélasticité

Flexion-Torsion des ailes ou flottement (flutter)

- Si l'on examine l'évolution des fréquences on observe que lorsque la vitesse croît les fréquences des mouvements de torsion et de flexion se rapprochent et qu'au moment où elles se confondent on observe le départ en instabilité.
- Au delà de cette valeur un mouvement est amorti, l'autre amplifié avec un coeff d'amortissement négatif. Il prend de l'énergie au fluide.
- Ce type d'instabilité porte le nom d'instabilité par confusion de fréquence.



avec $\omega_z^2 = 10$, $\omega_\alpha^2 = 5$, $1 + \frac{m\ell^2}{J} = 0.5$, $\frac{\rho c}{2J}(\ell C'_z - c C'_M) = 5$ et $\frac{\rho c^2}{2J} C'_M = 1$

- Pour la tenue au vent des ponts il est par exemple classique d'admettre qu'un rapport entre les fréquences des modes de torsion et de flexion compris entre $\sqrt{2}$ et 2 est suffisant pour écarter tout risque de flottement.

- Tant que l'hypothèse quasi-statique demeure valide le principe d'étude des problèmes aérodélastiques réside en une linéarisation des forces et moments aérodynamiques autour des petits mouvements de la structure en négligeant les effets de l'instationnarité
- Dans le cas général on pose :

$$F = \frac{1}{2} \rho U^2 S f(H_1 \ddot{z} + H_2 \ddot{\alpha} + H_3 \dot{z} + H_4 \dot{\alpha} + \dots) \quad (44)$$

$$M = \frac{1}{2} \rho U^2 S \ell g(A_1 \ddot{z} + A_2 \ddot{\alpha} + A_3 \dot{z} + A_4 \dot{\alpha} + \dots) \quad (45)$$

- Les coefficients aérodélastiques H_i et A_i sont appelés dérivées de flottement.
- Lorsque des effets instationnaires apparaissent dans l'hypothèse de quasi stationnarité n'est plus retenue, et l'influence du mouvement de la structure sur l'écoulement est à considérer.

- 1 Introduction
- 2 Formulation du problème général- Analyse dimensionnelle
- 3 Fluide au repos
- 4 Turbulence atmosphérique
- 5 Aéroélasticité
- 6 Sloshing**
 - Introduction
- 7 Conduites élastiques - Propagation d'ondes
- 8 Méthodes numériques pour l'IFS

Liquid sloshing

Introduction

- Liquid sloshing in containers is of great concern in many industrial activities : aeronautics & aerospace engineering as well as naval, civil or nuclear engineering.
- This short introduction to tank sloshing is divided in two parts :
 - ▶ the first part deals with the theory of potential flows applied to liquid sloshing dynamics.
 - ▶ the second part main concern is related to the experimental identification of tank sloshing dynamic parameters in a moving tank.
- Liquid sloshing appears in partially filled containers like fuel tanks in planes, rockets or ships or simply in water tank subjected to motions/vibrations.
- The tank sloshing theory aims to solve the fluid free-surface motion in order to estimate the natural frequencies and modal shapes that occur in the container in response to external excitations.
- From an engineering point of view knowing the forces and moments that act on the container's wall will allow us to mechanically correctly design it.

Tank sloshing

Introduction

- Liquid sloshing appear in tanks in the presence of a free surface between the liquid and a gas and of an acceleration.
- One of the simplest situations is the U-tube containing a liquid.
- If a vacuum or an overpressure is applied to one end of the tube to create an imbalance and if this imbalance is suddenly released, the fluid will naturally oscillate in the tube.
- One of the most interesting result if we consider an incompressible inviscid fluid is that the frequency of oscillations depends only of ℓ , the tube length !
- Indeed we have : $\omega = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}$

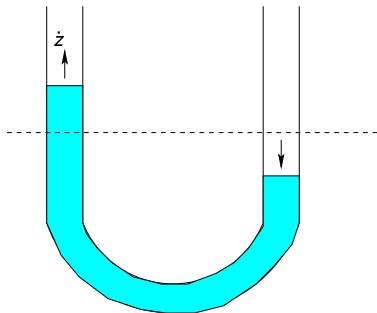


Figure 22 – The U-tube.

Tank sloshing

1D simplified Tuned Liquid Damper

- Applications of this very simple phenomenon are used to dampen the movements of tall buildings. These are the so called Tuned Liquid Damper.
- In the simplified example presented here the motion of the building is horizontal. The equation of motion of the liquid column in the TLD can be obtained quite easily :

$$m\ell\ddot{z} + \lambda\dot{z} + 2mgz = -m\ell_h\ddot{x} \quad (46)$$

with : λ relative to the pressure drop in the dissipator et ℓ_h the horizontal liquid length subjected to the building horizontal acceleration \ddot{x} .

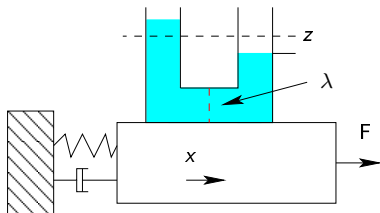


Figure 23 – 1D TLD

Tank sloshing

1D simplified Tuned Liquid Damper

For the building we have :

- Mass M , flexural or bending stiffness k , damping coefficient η
- $\omega_b = \sqrt{k/M}$ the building bending natural frequency
- $\xi = \frac{1}{2} \frac{\eta}{\sqrt{kM}}$ the non-dimensionnal damping coeff.

$$(1 + \frac{m\ell_h}{M})\ddot{x} + 2\omega_b\xi\dot{x} + \omega_b^2x = \frac{F}{M} - \frac{m\ell_h}{M}\ddot{z} \quad (47)$$

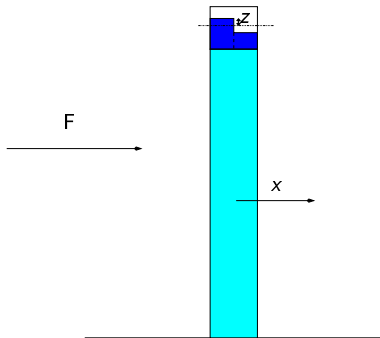


Figure 24 – 1D TLD

- If now we consider the coupled system we obtain :

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{m\ell}{M} & \frac{m\ell h}{M} \\ \frac{\ell h}{\ell} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\omega_b \xi & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{m\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_b^2 & 0 \\ 0 & \omega_f^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F}{M} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

with : F possibly an external forcing for instance of aerodynamic or seismic origin.

- so finally :

$$M.\ddot{X} + A.\dot{X} + K.X = F \quad (49)$$

- ℓ is an operating variable that allows to tune the damping for a given external excitation frequency.
- In these examples the liquid sloshing is modeled by the oscillation of a liquid column, but in general in a classical tank, waves will appear at the surface of the tank which will considerably modify the response of the latter

Tank sloshing

Rectangular tank

- We now consider a rectangular tank subjected to small horizontal periodic motions.

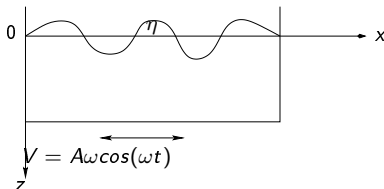


Figure 25 – The "ideal" rectangular tank.

- The fluid is assumed to be incompressible and the flow inviscid and non-rotational.
- We are looking for the force exerted by the fluid on the walls and for that we first look for the fluid motion in the tank.

Tank sloshing

Rectangular tank

- As the flow is assumed to be non-rotational we can introduce the velocity potential $\Phi(x, z, t)$

$$\mathbf{u} = \nabla \Phi \quad (50)$$

- Local form of the mass conservation $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ yields that the velocity potential has to verify the Laplace's equation :

$$\Delta \Phi = 0 \quad (51)$$

- The fluid pressure is obtained from the momentum equation, always in its local form :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (52)$$

that yields :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} + \nabla \frac{u^2}{2} \right) = -\nabla p - \rho \nabla(gz) \quad (53)$$

- Introducing the non-rotational property we obtain :

$$\rho \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \right) = -\nabla(p + \rho gz) \quad (54)$$

- And finally the unsteady Bernoulli's equation :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = Cte \quad (55)$$

Tank sloshing

Rectangular tank

- At the free surface two boundary conditions have to be fulfilled : one for kinematics and the other for the stresses (assuming by convention that $p_{atm} = 0$).

$$\text{For } z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \eta}{\partial t} = v & = & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + g\eta & = & 0 \end{array} \right. \quad (56)$$

- For the side and bottom walls of the tank, as the flow is inviscid the fluid velocity in the direction normal to the walls has to be equal to the wall velocity in the same direction :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{At } x = 0 \text{ ou } x = L & \frac{\partial \Phi}{\partial x} & = A\omega \cos \omega t \\ \text{At } z = h & \frac{\partial \Phi}{\partial z} & = 0 \end{array} \right. \quad (57)$$

- We are looking for a velocity potential function of the form :

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left(\phi(x, z) e^{i\omega t} \right) \quad (58)$$

- So finally we have to solve the PDE system :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \Delta \phi & = & 0 \quad (x, z) \in [0, L] \times [-h, 0] \\ g \frac{\partial \phi}{\partial z} - \omega^2 \phi & = & 0 \quad (x, z) \in [0, L] \times \{0\} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & = & A\omega \quad (x, z) \in \{0, L\} \times [-h, 0] \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} & = & 0 \quad (x, z) \in [0, L] \times \{-h\} \end{array} \right. \quad (59)$$

- Solution for ϕ is :

$$\phi(x, z) = A\omega \left[\left(x - \frac{L}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \frac{\cosh(\lambda_n(z+h))}{\cosh(\lambda_n h)} \cos(\lambda_n x) \right] \quad (60)$$

with :

$$\alpha_n = \frac{2}{\lambda_n^2 L} [(-1)^n - 1] \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (61)$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n^2 = g \frac{n\pi}{L} \tanh\left(\frac{n\pi h}{L}\right) \quad (62)$$

Tank sloshing

Rectangular tank

- The shape of the free surface is deduced from the kinematic boundary condition at $z = 0$

$$v = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} = A\omega \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \lambda_n \tanh(\lambda_n h) \cos(\lambda_n x) \cos(\omega t) \quad (63)$$

and

$$\eta = \int v dt = A \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \lambda_n \tanh(\lambda_n h) \cos(\lambda_n x) \sin(\omega t) \quad (64)$$

- The forces acting on the walls are deduced from the surface integral of the dynamic pressure acting on these same walls. So we get using (55) :

$$p + \rho \frac{u^2}{2} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \rho \omega \phi \sin \omega t \quad (65)$$

that yields :

$$F_x = \left[\int_{-h}^0 -(p + \rho \frac{u^2}{2}) n dz + \int_{-h}^0 -(p + \rho \frac{u^2}{2}) n dz \right] x \quad (66)$$

and :

$$F_x = \left[\int_{-h}^0 -\rho \omega \phi(0, z) dz + \int_{-h}^0 \rho \omega \phi(L, z) dz \right] \sin \omega t \quad (67)$$

Tank sloshing

Rectangular tank

- So finally :

$$F_x = \left[\rho L h + \rho \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n^3 L} \tanh(\lambda_n h) \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \right] A \omega^2 \sin \omega t \quad (68)$$

- As the tank motion is given by :

$$m \ddot{X} + \eta \dot{X} + kX = F_x \quad (69)$$

It's more convenient to write F_x under the following way $F_x = -m_a \ddot{X}$ which leads for m_a :

$$m_a = \rho L h + \rho \sum_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{1 - (-1)^n}{\lambda_n^3 L} \tanh(\lambda_n h) \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (70)$$

- m_a is the added mass of the tank induced by the internal fluid motion.

Tank sloshing

Rectangular tank

- With $L = 2h$

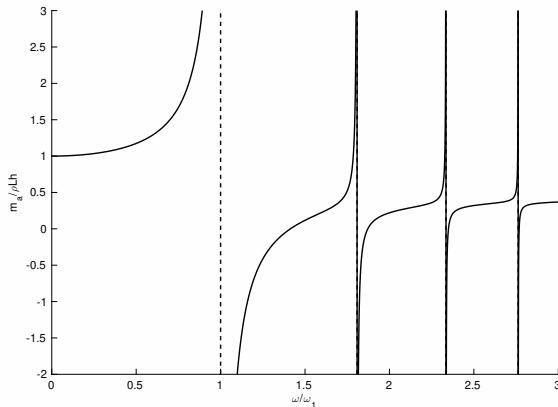


Figure 26 – Non-dimensional added mass for the case of a rectangular tank

- When $m_a < 0$ inertia added by the internal fluid motion helps the tank motion, conversely when $m_a > 0$ inertia is added to the tank slowing down its motion.
- m_a tends toward $\pm\infty$ when ω is equal to the natural modes of the tank (ω_n).

- 1 Introduction
- 2 Formulation du problème général- Analyse dimensionnelle
- 3 Fluide au repos
- 4 Turbulence atmosphérique
- 5 Aéroélasticité
- 6 Tank sloshing
- 7 **Conduites élastiques - Propagation d'ondes**
 - Célérité de Moens-Korteweg pour les fluides incompressibles
 - Flambage et battement des conduites traversées par un fluide
- 8 Méthodes numériques pour l'IFS

Conduites élastiques

Instationnarité et incompressibilité

- Lorsque l'on considère une conduite transportant un fluide on suppose généralement que :
 - ▶ le fluide est incompressible : $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
 - ▶ la conduite est rigide *i.e.* indéformable
- Cela induit notamment que la vitesse de propagation d'ondes de pression dans la conduite n'est pas finie.
- Considérons par exemple un tuyau de longueur L parcouru par un débit un fluide quelconque
- La conservation du débit implique que :

$$\int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

Si le est fluide incompressible $u = \text{Cte}$ et par suite $Q = \text{Cte}$

- Tout changement de débit se propage donc dans la conduite instantanément



- En réalité pour l'exemple précédent un changement de débit se traduit par une variation **sévère** de la pression. En première approximation on a sensiblement :

$$\Delta p \approx -\rho \frac{L}{S} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

- On peut donc ainsi très vite mobiliser :
 - ▶ la compressibilité de l'eau
 - ▶ la rigidité de la conduite
- L'onde de pression correspondant au changement de débit se propage alors dans la conduite à une vitesse qui n'est ni celle du son dans l'eau ni celle du son dans la conduite mais à une vitesse intermédiaire qui correspond au couplage **fluide/conduite**.

Conduites déformables

Compressibilité des fluides

- Les fluides sont généralement compressibles
- On mesure leur compressibilité par :
 - ▶ le coefficient de compressibilité isotherme : $\chi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} |_T$ (Pa^{-1})
 - ▶ le module élastique $\epsilon = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} |_T = \chi^{-1}$ (Pa)
- Le module élastique de l'eau est de l'ordre de $\epsilon_{eau} \approx 2.2 \cdot 10^9$ (Pa) à 20°C ($\epsilon_{acier} \approx 200 \cdot 10^9$ (Pa)).
- Si la conduite est déformable une perturbation de pression se propage à la fois dans le fluide et dans la paroi de la conduite.

Conduites déformables

Célérité de Moens-Korteweg pour les fluides incompressibles

- On considère un fluide parfait (non visqueux) incompressible en écoulement dans une conduite cylindrique rectiligne de section circulaire
- Les propriétés de l'écoulement sont supposées constantes dans une section donnée.
- On écrit les bilans dans un domaine fluide correspondant à un tronçon de la conduite Ω_f
- Ainsi pour la conservation de la masse :

$$\int_{\Omega_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \int_{\partial \Omega_f} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (71)$$

- Avec l'hypothèse d'écoulement unidirectionnel on a : $u = u(x)$, $p = p(x)$, $\rho = \rho(x)$ et $S = S(x)$
- on peut ré-écrire pour la conservation de la masse :

$$\int_L \frac{\partial \rho S}{\partial t} dx - [\rho u S]_0 + [\rho u S]_1 = 0$$

où les indices 0 et 1 se réfèrent respectivement à l'entrée et à la sortie du tronçon considéré.

- Soit en utilisant la relation de Green-Ostrogradski

$$\int_L \frac{\partial \rho S}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u S) dx = 0$$

- ou encore localement avec $\rho = \text{Cte}$:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial u S}{\partial x} = 0$$

Conduites déformables

Célérité de Moens-Korteweg pour les fluides incompressibles

- L'équation de conservation de la quantité de mouvement en projection sur l'axe de la conduite s'écrit de même :

$$\int_L \frac{\partial u S}{\partial t} dx - [u^2 S]_0 + [u^2 S]_1 = -\frac{1}{\rho} \int_L S \nabla p dx$$

- Soit en utilisant la relation de Green-Ostrogradski et toujours avec $\rho = \text{Cte}$:

$$\int_L \frac{\partial u S}{\partial t} + \nabla \cdot (u^2 S) dx = -\frac{1}{\rho} \int_L S \nabla p dx$$

- ou encore localement :

$$\frac{\partial u S}{\partial t} + \nabla \cdot (u^2 S) = -\frac{1}{\rho} S \nabla p$$

- Soit :

$$\frac{\partial u S}{\partial t} + \frac{\partial u^2 S}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} S \frac{\partial p}{\partial x}$$

- On définit la compliance de la conduite C par :

$$C = \frac{\partial S}{\partial p}$$

- On peut alors écrire :

$$\frac{\partial S}{\partial t} = C \frac{\partial p}{\partial t}$$

Soit :

$$C \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u S}{\partial x} = 0$$

Conduites déformables

Célérité de Moens-Korteweg pour les fluides incompressibles

- On peut facilement obtenir le système suivant en linéarisant l'équation de QDM projetée sur x :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{S}{\rho C} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - \frac{S}{\rho C} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 0$$

- avec $Q = uS$ le débit qui traverse la conduite.
- Il s'agit de deux équations de propagation d'ondes planes se déplaçant à la célérité :

$$c = \sqrt{\frac{S}{\rho C}}$$

- Pour expliciter la compliance de la conduite considérons une conduite élastique linéaire de longueur infinie et d'épaisseur très faible.
- La loi de Laplace s'écrit :

$$dpD = 2\sigma_{\theta\theta}e$$

avec

- ▶ dp différence de pression entre l'intérieur et l'extérieur de la conduite
- ▶ D diamètre de la conduite
- ▶ $\sigma_{\theta\theta}$ contrainte circonférentielle (orthoradiale) dans la conduite
- ▶ e l'épaisseur de celle-ci

Conduites déformables

Célérité de Moens-Korteweg pour les fluides incompressibles

- Pour un matériau élastique linéaire avec l'hypothèse des petites déformations on a :

$$\sigma_{\theta\theta} = E \frac{dD}{D} = \frac{E}{2D} \frac{dS}{S}$$

avec

- ▶ E le module élastique de la conduite
 - ▶ $\frac{dD}{D}$ la déformation tangentielle (orthoradiale) subie par le cylindre
- soit :

$$C = \frac{dS}{dp} = \frac{SD}{Ee}$$

- et finalement la célérité de Moens-Korteweg s'écrit :

$$c = \sqrt{\frac{S}{\rho C}} = \sqrt{\frac{Ee}{\rho D}}$$

- la célérité est d'autant plus :
 - ▶ grande que la conduite est rigide ou épaisse
 - ▶ faible que la masse volumique du fluide est importante ou que le diamètre de la conduite est grand
- Cette formule peut être utilisée pour des conduites réalisées avec des matériaux très souples.
- Lorsque la rigidité de la conduite augmente la compressibilité de l'eau intervient.

Conduites déformables

Flambage et battement des conduites traversées par un écoulement

- La problématique est ici différente avec l'étude des mouvements induits dans des conduites par des écoulements les traversant.
- Premières études dès 1878 par Aitken et Brillouin (1885) notamment puis un vif regain d'intérêt avec l'essor du transport des produits pétroliers par "pipeline".

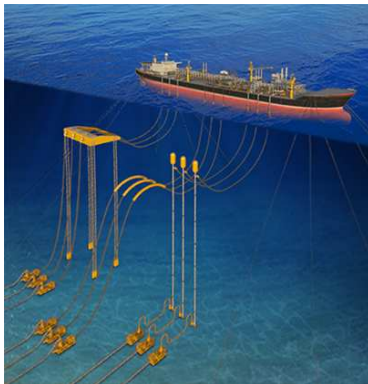


Figure 27 – Floating production storage & offloading (FPSO) et risers

Conduites déformables

Flambage et battement des conduites traversées par un écoulement

- Faisceaux de tubes dans les échangeurs de chaleur

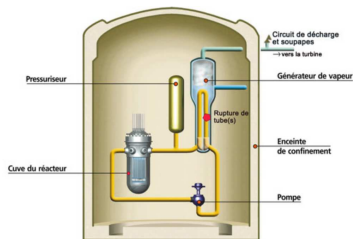
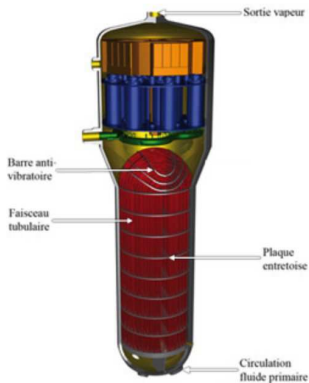


Figure 28 – Générateurs de vapeur

Conduites déformables

Flambage et battement des conduites traversées par un écoulement

- Fréquence complexe sans dimension pour une conduite encastrée-encastrée avec $\beta = 0.5$

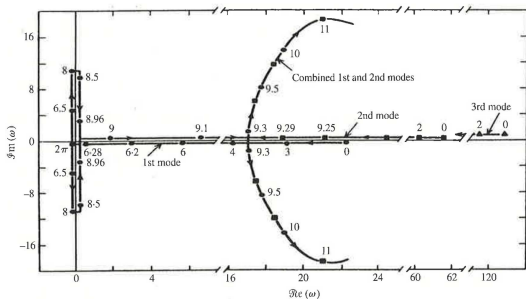


Figure 29 – D'après Païdoussis (1998)

Flambage et battement des conduites traversées par un écoulement

- Fréquence complexe sans dimension pour une conduite sur appuis avec $\beta = 0.1$

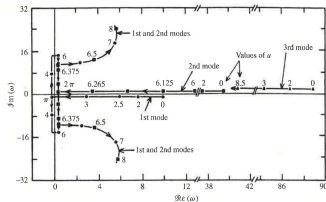


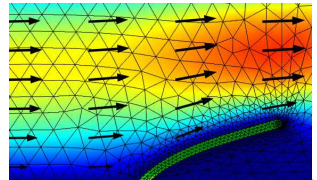
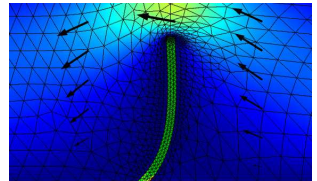
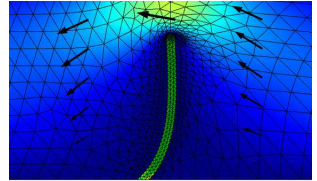
Figure 30 – D'après Païdoussis (1998)

- 1 Introduction
- 2 Formulation du problème général- Analyse dimensionnelle
- 3 Fluide au repos
- 4 Turbulence atmosphérique
- 5 Aéroélasticité
- 6 Tank sloshing
- 7 Conduites élastiques - Propagation d'ondes
- 8 Méthodes numériques pour l'IFS**
 - Introduction

Numerical methods for FSI

Introduction

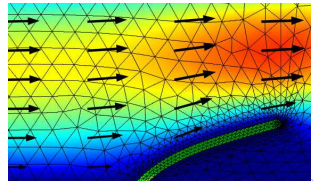
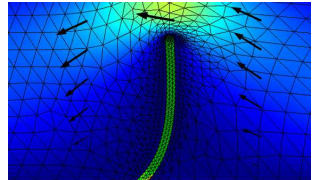
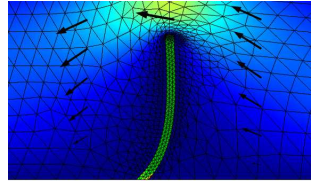
- Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir de solutions analytiques même approchées du problème, le recours à des méthodes numériques est souvent une approche intéressante.
- Il faut cependant assez vite estimer les coûts de calcul qui peuvent rapidement devenir prohibitifs.
- Dans un problème classique d'IFS la mécanique des fluides est analysée avec un formalisme d'Euler alors que c'est plutôt celui de Lagrange qui est retenu pour analyser les mouvements/déformations de la structure.
- L'un des principal problème est la réactualisation du domaine fluide au fur et à mesure des déformations induites sur la structure



Méthodes pour écoulement avec interfaces

Méthodes Volume Of Fluid pour écoulement à surface libre

- Il est assez fréquent d'avoir des situations où deux fluides non miscibles sont séparés par une interface déformable
- dans cette situation plusieurs méthodes



Sommaire

Rappels de mécanique des fluides

Equation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

Coordonnées cartésiennes

- Equation de conservation de la masse ou de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (72)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u + \rho f_x \quad (73)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta v + \rho f_y \quad (74)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta w + \rho f_z \quad (75)$$

$$(76)$$

Rappels de mécanique des fluides

Equation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

Coordonnées cartésiennes - Notation indicielle

- Equation de conservation de la masse ou de continuité :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (77)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) + \rho f_i \quad (78)$$

$$i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Rappels de mécanique des fluides

Equation de Navier-Stokes pour un fluide incompressible

Coordonnées cylindriques

- Equation de conservation de la masse ou de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial r \cdot u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (79)$$

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla u_r - \frac{u_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \rho f_r \quad (80)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla u_\theta - \frac{u_r u_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\Delta u_\theta + \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + \rho f_\theta \quad (81)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla u_z \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta u_z + \rho f_z \quad (82)$$

$$(83)$$

avec :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (84)$$

et :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (85)$$

Sommaire

Tank sloshing with the "Hexapode"

Introduction

- We consider the sloshing of a parallelepipedic tank subjected to a horizontal periodic motion.
- The motion is ensured by the the Centrale Marseille "Hexapode" facility (plot4 of Centrale Marseille).
- The device is made up of six electric cylinders which allow to put in movement a plate surmounted by a rectangular tank

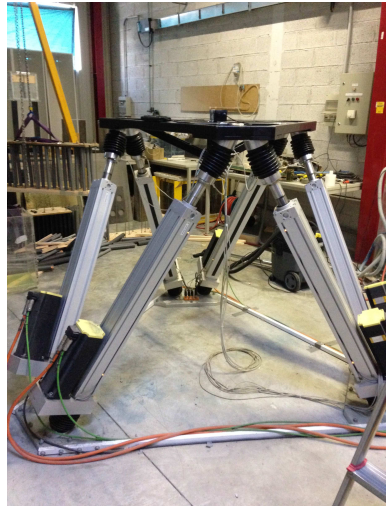


Figure 31 – The hexapode of Centrale Marseille

Tank sloshing with the "Hexapode"

Introduction

- Here the main difference with the previously studied case is that the internal fluid motion in the tank is dampen by a dissipator : a plate perforated with circular holes.



Figure 32 – The tank with the dissipator

Tank sloshing with the "Hexapode"

Introduction

- The problem is quite similar but now we are looking for velocity potential with the form :

$$\Phi(x, z, t) = \Re(\phi(x, z)e^{-i\omega t}) \quad (86)$$

- The set of PDEs is also the same but we have now a supplementary condition to take into account the pressure drop throughout the dissipator.

$$p_- + p_+ = \rho \frac{1 - \tau}{2\xi\tau^2} u_r |u_r| \quad (87)$$

where ξ is a pressure loss coefficient and τ the plate porosity *i.e.* the ratio between the perforated area and the plate total area.

- Once again we are looking for solutions of the form :

$$\begin{aligned} \phi(x, z) = & A\omega x + \sum_{m=1}^{+\infty} A_m \cos \lambda_m (x - b) \frac{\cosh \lambda_m (z + h)}{\cosh \lambda_m h} \pm B_0 \cos k_0 (x \pm b) \frac{\cosh k_0 (z + h)}{\cosh k_0 h} \\ & \pm \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{\cosh k_n (x \pm b)}{\cosh k_n b} \cos k_n (z + h) \end{aligned} \quad (88)$$

where $\lambda_m = \frac{\pi(2m-1)}{2b}$, $A_m = \frac{2A\omega^3}{\lambda_m^2(\omega_m^2 - \omega^2)b}$, $\omega_m^2 = g\lambda_m \tanh(\lambda_m h)$ and $\omega^2 = -gk_n \tanh(k_n h)$.

Tank sloshing with the "Hexapode"

Introduction

- The force acting on the walls are evaluated following a similar approach ([4]) :

$$F_x = \left[\int_{-h}^0 -\left(p + \rho \frac{u^2}{2}\right)|_{x=-b} n dz + \int_{-h}^0 -\left(p + \rho \frac{u^2}{2}\right)|_{x=0} n dz + \int_{-h}^0 -\left(p + \rho \frac{u^2}{2}\right)|_{x=b} n dz \right] \times \quad (89)$$

- After some math we obtain :

$$F_x = \Re\{2i\rho A\omega^2 b h(m_a + i\eta_a)e^{-i\omega t}\} \quad (90)$$

where m_a is the added mass and η_a a damping coefficient in quadrature with the mass.

Tank sloshing with the "Hexapode"

Introduction

- Indeed if we assume that : $X = Aie^{-i\omega t}$ we obtain :

$$-MAi\omega^2 e^{-i\omega t} + \eta A\omega e^{-i\omega t} + CAie^{-i\omega t} = 2i\rho A\omega^2 bh(m_a + i\eta_a)e^{-i\omega t} \quad (91)$$

So after some math again :

$$-(M + 2\rho bhm_a)Ai\omega^2 e^{-i\omega t} + (\eta + 2\rho\omega bh\eta_a)A\omega e^{-i\omega t} + CAie^{-i\omega t} = 0 \quad (92)$$

- The hydrodynamic force exerted on the tank is made of two terms in quadrature (with a phase offset of 90 deg) : one corresponds to an added mass, m_a , the other to a damping term, η_a .
- The idea of the work to achieved is to retrieve experimentally these two terms by using the simultaneous recording of the forces acting on the tank as well as its motion.

Tank sloshing with the "Hexapode"

Available data

- We have the digital records of the forces and displacements measured on the tank for :
 - ▶ 5 different horizontal displacement amplitudes $A = \{1, 4, 6, 8, 12\}$ (en mm)
 - ▶ 22 frequencies :

$$F = \frac{\omega}{2\pi} = 0.6360.7160.7960.820.8750.9070.9550.9861.0341.1141.1941.2731.3531.3841.4321.5121 \quad (93)$$

- The data are available in the files `masse_S1_xx.txt` where $1 \leq xx \leq 110$
- The 22 first files ($1 \leq xx \leq 22$) stand for $A = 1$ mm, the 22 following ones for $A = 4$ mm and so on.
- Each files contains temporal records, arranged in columns, acquired at the sampling frequency of $f = 100$ Hz. Columns are :
 - ▶ Tank positions in mm $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$
 - ▶ Tank angular positions in degrees for axis $RX(t)$, $RY(t)$ et $RZ(t)$
 - ▶ Force components in newtons exerted by the tank on its base : $FX(t)$, $FY(t)$ et $FZ(t)$.
 - ▶ Moment components in N.m exerted by the tank on its base : $MX(t)$, $MY(t)$, $MZ(t)$.
- For this work only two columns are of interest : the second one for $Y(t)$ as the tank motion is along Y axis and the eighth one for $FY(t)$ as the internal fluid motion exerts on the tank wall a force in the Y direction.

Tank sloshing with the "Hexapode"

Requested work

- The required work consists in comparing the theoretical added masses and damping coefficients with those deduced from experimental measurements.
- For the theoretical values we can use a fortran program **appli.exe** that computes m_a et η_a using theory and with parameters defined in file **fort.2**. Computed values of $m_a(\omega)$ are recorded in file **fort.11**, and $\eta_a(\omega)$ in file **fort.12**.
- For the experimental data the work consists in :
 - ▶ Open and read the files **masse_S1_XX.txt** where **XX** is a number between 1 and 110 (5 amplitudes X 22 frequencies).
 - ▶ Deduced from a Fourier analysis the first mode coefficients of the displacement along **Y** axis (displacement has the same phase than the acceleration). Do the same for the force along **Y** axis, **FY**, and deduce with the help of equation (92) the evolution of m_a and η_a with ω .
 - ▶ Send Matlab files and figures to olivier.boiron@centrale-marseille.fr with mail subject "hexapode"!!

Tank sloshing with the "Hexapode"

Experimental parameters

- Tank length $L = 0.8m$
- Water depth : $h = 0.225m$
- Dissipator height from the bottom : $0.32m$
- Porosity : 0.18
- Pressure loss coefficient : 0.5
- Motion amplitudes : 1, 4, 6, 8, 12mm
- Water mass = 119kg
- Sampling frequency is $f_{acq} = 100Hz$.
- Files **masse_para_XX.txt** are forces recorded with an empty tank (without water). They allow us to estimate the forces generated by other masses like tank base, ...

Tank sloshing with the "Hexapode"

Experimental parameters - Proposed methodology

- By using **appli.exe** with the right parameters in **fort.2** compute $m_a(\omega)$ (**fort.11**) and $\eta_a(\omega)$ (**fort.12**).
- Plot with MATLAB the evolution of m_a and η_a with ω . It needs to open the two files **fort.11** and **fort.12**, to retrieve the data and to plot them.
- What happens if the pressure loss coefficient of the dissipator is set to 0.25?
- With the file **masse S1_001.txt** which corresponds to $\frac{\omega}{2\pi} = 0.636$ Hz and $A = 1$ mm retrieve and plot $Y(\bar{t})$ and $FY(t)$ against time (in sec.).
- Remove from $Y(t)$ and $FY(t)$ the first and last seconds where the regular tank motion (that starts from rest) is not installed.
- The force $FY(t)$ contains the two components of the fluid action on the tank : inertia and damping. We know that these two components are in phase quadrature. So the idea is to make a Fourier analysis of $FY(t)$ and $Y(t)$ to retrieve the two unknowns.
- As the $FY(t)$ and $Y(t)$ signals are recorded for about 10 seconds, to improve frequency resolution we use a gliding window Fourier analysis. The Matlab function **fft_gliss3.m** will help you for this task.

Sommaire



C. Cremona and J.C. Foucriat.
Comportement au vent des ponts.
Presses de l'ENPC, 2002.



E. de Langre.
Fluides et solides.
Editions de l'Ecole Polytechnique, 2001.



E.H. Dowell.
A modern course in aeroelasticity.
Springer, 2005.



B. Molin and F. Remy.
Experimental and numerical study of the sloshing motion in rectangular tank with a perforated screen.
Journal of Fluids and Structures, 9-13 :463–480, 2013.